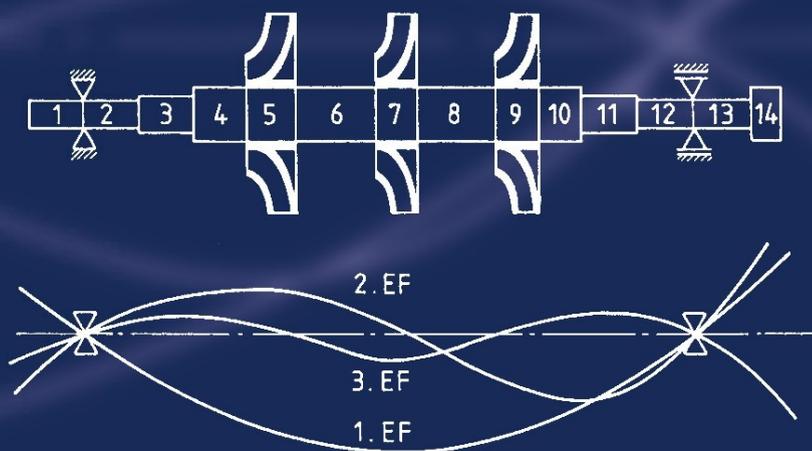


Robert Gasch · Klaus Knothe · Robert Liebich

# Strukturdynamik

Diskrete Systeme und Kontinua

2., neu bearbeitete Auflage



# Strukturdynamik

Robert Gasch · Klaus Knothe · Robert Liebich

# Strukturdynamik

Diskrete Systeme und Kontinua  
2. Auflage



**Springer** Viewweg

Robert Gasch  
TU Berlin  
Berlin, Deutschland

Robert Liebich  
TU Berlin  
Berlin, Deutschland

Klaus Knothe  
TU Berlin  
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-540-88976-2  
DOI 10.1007/978-3-540-88977-9

978-3-540-88977-9 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg  
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer-Verlag ist eine Marke von Springer DE.  
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
[www.springer.de](http://www.springer.de)

# Vorwort

Die beiden Bände „Strukturdynamik“, die 1987 bzw. 1989 erschienen, haben nichts an Aktualität eingebüßt. Sie liefern die Grundlagen der modernen Berechnungsverfahren wie Mehrkörper-Algorithmen und FEM-Programmsysteme für Strukturen mit rotierenden und nicht-rotierenden Komponenten. Das Werk wurde durchgesehen, korrigiert und teilweise ergänzt. Neu aufgenommen wurde die „Modale Behandlung periodisch-zeitvarianter Systeme“. Im Hubschrauberbau und bei der Magnetschwebebahn, um nur zwei Beispiele zu nennen, haben diese parametererregten Systeme mit ihren typischen instabilen Zonen erhebliche technische Bedeutung.

Während die damaligen Bände noch von Hand gesetzt wurden, wurde die Neuauflage unter dem neuen Mitautor Robert Liebich als elektronische Fassung erstellt, so dass die Strukturdynamik jetzt auch im Internet verfügbar ist. Der Springer Verlag wünschte einerseits diese Zusammenfassung in einem Band; andererseits wurde ein Seitenlimit vorgeschrieben. Um dieser Auflage entgegen zu kommen, musste auf die Übungsaufgaben verzichtet werden. Sie stehen in Bände einschließlich der Lösungen im Internet unter [www.kup.tu-berlin.de](http://www.kup.tu-berlin.de) zur Verfügung.

Die bisherigen Autoren, Gasch und Knothe, haben die Gestaltung der Neuauflage in die Hände von Robert Liebich gegeben, da sie nach dem Eintritt in den Ruhestand mit aktuellen Publikationen und vor allem den Neu-Auflagen ihrer anderen Lehrbücher (Gasch und Kollegen mit „Windkraftanlagen“ und „Rotordynamik“; Knothe und Kollegen mit „Finite Elemente“, „Schienenfahrzeugdynamik“ und „Ausgewählte Lebensläufe aus Nachrufschriften in der Markgrafschaft Brandenburg-Bayreuth im 17. Jahrhundert“) voll ausgelastet waren. Die Erstellung der elektronischen Fassung einschließlich aller Formeln mit LaTeX, die Berücksichtigung aller Korrekturhinweise, für die den Einsendern vielfach gedankt wird, und die vollständige Durchsicht und Korrektur des bisherigen Textes und der Formeln lagen in den Händen von Robert Liebich und seinem Buch-Team. Hier sind Tobias Bach, Stefan Dreissig, Phillip Müller, Christian Packi, Andreas Scholz, Henrike Nimmig, Daniel Pucknat, Piotr Kalinowski, René Kamieth und Frau Yamina Gorek zu nennen, denen wir herzlich dafür danken.

Die bisherige Gliederung der beiden Bände wurde beibehalten. Das Buch ist weiterhin in zwei Bereiche getrennt: Diskrete Systeme einerseits und Kontinua und ihre

Diskretisierung andererseits. Maßgebend hierfür waren die Vielzahl positiver Rückmeldungen von vielen Kollegen und von früheren Mitarbeitern, die heute in der Industrie tätig sind, und natürlich die Erfahrungen, die die Autoren in ihrer eigenen Forschungsarbeit (Gasch: Windenergieanlagen und Rotordynamik, Knothe: Schienenfahrzeugdynamik und Gleisdynamik, Liebich: Turbomaschinen, Rotordynamik und Windenergieanlagen) gewonnen haben.

Das Werk ist als korrigierte Neuauflage zu sehen. Mit Robert Liebich als Mitautor soll die Kontinuität bei weiteren Neuauflagen des Buches in der Zukunft sichergestellt werden.

Gedankt sei an dieser Stelle dem Springer Verlag für die hervorragende Zusammenarbeit, dort insbesondere Herrn Dr. Lehnert und Frau Cuneus. Der Springer Verlag sorgte auch dafür, dass die bisherigen von Frau Karin Peters und Frau Christine Koll gezeichneten Abbildungen in eingescannter Form zum größten Teil wieder verwendet werden konnten. An der Fertigstellung der damaligen Manuskripte beider Bände waren diverse Mitarbeiter beteiligt, bei denen wir uns ebenfalls nochmals herzlich bedanken. In alphabetischer Reihenfolge, bei Unterschlagung der akademischen Titel sind das: D. Bosin, P. Gnielka, A. Groß-Thebing, K. Hempelmann, Th. Jainski, W. Kik, G. Kleintges, L. Mauer, D. Moelle, M. Person, B. Ripke, R. de Silva, H. Steinborn, G. Wang und H. Wessels.

Nützliche Hinweise kamen bei der Manuskripterstellung und im Laufe der Jahre von Prof. M. Link, Prof. Dr. H. Pfützner, Dr. R. Renger, Prof. H. Springer und Prof. M. Zehn um nur einige namentlich zu nennen. Auch ihnen gilt unser Dank.

Berlin, Februar 2012

Robert Liebich, Robert Gasch und Klaus Knothe

# Einleitung

Die Strukturmechanik (engl. „structural dynamics“), ist ein Teilgebiet der Mechanik, das sich im Allgemeinen mit der Dynamik, also den Schwingungsvorgängen, von Strukturen befasst. Dazu gehören sowohl Bauwerke, wie Brücken, aber auch komplexere technische Systeme wie zum Beispiel Flugzeuge, Fahrzeuge, Windenergieanlagen und Turbomaschinen. Eine strukturmechanische Analyse beinhaltet die mathematisch-mechanische Beschreibung der technischen Struktur als schwingungsfähiges System anhand eines – mehr oder weniger – vereinfachenden Modells, dessen analytische, numerische oder auch experimentelle Behandlung und die Interpretation der Ergebnisse.

Waren in der Vergangenheit analytische Modelle und deren sowohl analytische als auch numerische Behandlung Stand der Technik, so hat sich die Entwicklung der Strukturmechanik seit Mitte der 90er Jahre sehr stark in Richtung numerische Analyse gewandelt. In den meisten Forschungs- und Entwicklungsabteilungen dominieren FEM- und MKS-Analysen (FEM = Finite-Elemente-Methode, MKS = Mehrkörpersysteme) die Untersuchungen zu Schwingungsproblemen. Selbst in den Ingenieursdisziplinen an Universitäten und Fachhochschulen werden fast ausschließlich FEM und MKS Softwarepakete verwendet. Dies liegt vor allem daran, dass diese Programme deutlich leistungsfähiger geworden sind, gerade im Hinblick auf nicht-lineare Effekte und die Behandlung von Gesamtsystemen mit extrem vielen Freiheitsgraden. All diesen FEM- und MKS-Programmen liegen die in diesem Buch behandelten Modelle, Methoden und teilweise auch Algorithmen zu Grunde.

War der damalige Anspruch der Autoren noch die umfassende Darstellung der mechanischen Modellbildung und dafür notwendiger analytischer Lösungswege für die Ingenieurspraxis, so bleibt für diese Neuauflage des Bandes „Strukturmechanik“ der Anspruch, ein Grundlagenwerk für das Verständnis strukturmechanischer Vorgänge und deren Analyse zu liefern. Die heutzutage weit fortgeschrittene numerische Modellbildung und -behandlung ist also nicht das Ziel, obwohl – wie auch schon in der ursprünglichen Auflage – die ersten Schritte zum Aufbau von FEM- und MKS-Algorithmen erklärt werden. Mit den Inhalten dieses Buches lassen sich also auf analytischem Wege Abschätzungen für das zu erwartende strukturmechanische Verhalten von dynamisch belasteten Strukturen ermitteln. Solche Analy-

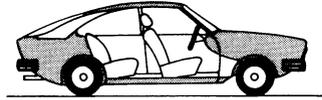
sen ermöglichen u. a. Parameterstudien, die bei rein numerischer Behandlung eines komplexen Gesamtmodells mit FEM oder MKS ökonomisch nicht zu vertreten wären. Auch lassen sich damit die komplexen FEM und MKS-Lösungen zumindest bezüglich der Größenordnung der Ergebnisse überprüfen. Die Notwendigkeit einer solchen Überprüfung wird in der immer mehr unter größerem zeitlichem und ökonomischem Druck stehenden Ingenieurspraxis gern übergangen. Dabei lassen sie sich eben mit Hilfe der hier vorgestellten analytischen Modelle relativ einfach durchführen.

So beginnt das Buch auch mit der Behandlung von Ein- und Zwei-Freiheitsgradsystemen. Anhand dieser einfachen, zu meist noch rein analytisch behandelbaren Systeme lassen sich viele Phänomene der Strukturodynamik erklären, die sich auch bei komplexeren Systemen zeigen. Das Buch ist – wie schon in den ersten beiden Bänden – in zwei Teilbereiche getrennt. Wir unterscheiden zwischen den Ein- und Mehrfreiheitsgradsystemen und den sogenannten Kontinua, deren modellhafte Beschreibung ebenfalls wieder diskret erfolgen kann. Eine weitere Unterscheidung von dynamischen Strukturen erfolgt bezüglich der Dämpfungsart – ungedämpft oder gedämpft beziehungsweise selbsterregungsfähig. Eine wesentliche Unterscheidung wird im Buch bezüglich der freien und erzwungenen Schwingungen gemacht. Darüber hinaus lassen sich die meisten Systeme noch bezüglich ihrer Behandlung im Zeitbereich und im Frequenzbereich unterscheiden.

Die grundlegende Einteilung der Systeme nach der Anzahl ihrer Freiheitsgrade macht einen entscheidenden Hinweis für der Modellbildung notwendig: Nicht das System liefert die Anzahl der Freiheitsgrade sondern der gewünschte Detailgrad der struktur-dynamischen Analyse. Dies wird in Abb. 1 deutlich. Hier wird am Beispiel eines Fahrzeugs eine Auswahl von möglichen, die Bewegung beschreibenden, Strukturmodellen gezeigt. Je nach Anzahl der Freiheitsgrade lassen sich mehr oder weniger komplexe Bewegungsformen des Fahrzeugs beschreiben.

In dem primitiven Modell von einem Freiheitsgrad (Abb. 1a) wurde die Reifenfederung und -dämpfung mit der Aufbaufederung und -dämpfung zusammengefasst und die Räder als starre Rollen idealisiert. Dieses Modell liefert hinsichtlich des Tauch-Freiheitsgrades vernünftige Aussagen für die Abstimmung des Systems, die im Allgemeinen so erfolgt, dass die Taucheigenfrequenz bei etwa 1 bis 2 Hz und der Dämpfungsgrad bei 0,2 bis 0,3 liegen. Dennoch muss für eine genauere Komfortuntersuchung zumindest der Nick-Freiheitsgrad einbezogen werden. Erst durch ihn kommt der Zeitunterschied zur Geltung, der zwischen Vorder- und Hinterrad beim Überfahren einer Fahrbahnunebenheit auftritt. Für Komfortuntersuchungen ist dieses Modell (Abb. 1b) schon recht brauchbar. Das Modell mit Nick- und Tauch-Freiheitsgrad des Wagenkörpers gibt aber unzureichend Auskunft darüber, ob beim Überfahren von Hindernissen Radentlastungen bis hin zu kurzzeitigem Abheben auftreten. Darüber kann erst ein Modell Aussagen machen, das die Vertikal-Freiheitsgrade der Achsmassen berücksichtigt (Abb. 1c). Mit diesem Modell erfasst man den Frequenzbereich von 0 bis 15 Hz schon sehr gut. Ein Modell, das bis 25 Hz brauchbar ist, wird u. U. schon die Annahme einer starren Karosserie aufgeben müssen und die 1. Biegeschwingungseigenform der Karosserie einbeziehen müssen (Abb. 1d). Bisher blieb das Modell in der Ebene, weil wir stillschweigend

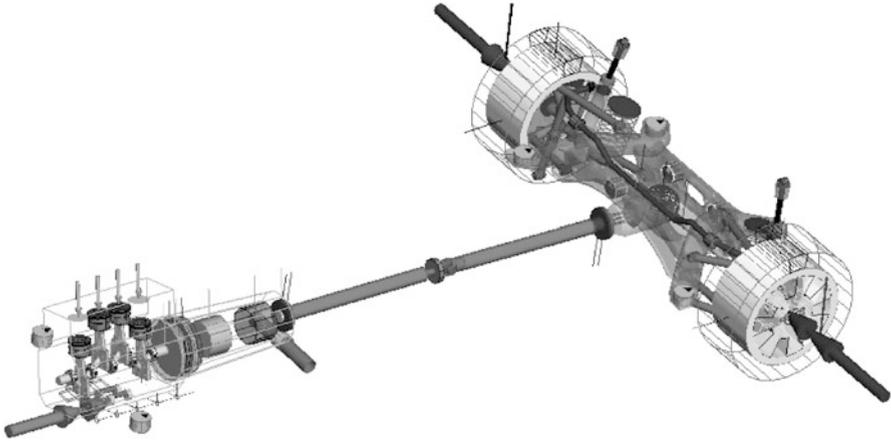
**Abb. 1** Ebene mechanische Modelle mit unterschiedlicher Zahl von Freiheitsgraden für einen Personenkraftwagen



Mech. Modell	Freiheitsgrade		
	1	Tauch-Freiheitsgrad	a
	2	Tauchen und Nicken	b
	4	Tauchen, Nicken und 2 Rad-Freiheitsgrade	c
	5	Tauchen, Nicken, 2 Rad-Freiheitsgrade und 1. Eigenform der Zelle	d

voraussetzen, dass nur Vertikalschwingungen untersucht werden, und dass die Fußpunktanregungen an den Rädern links und rechts in gleicher Weise erfolgen. Ein räumliches Modell mit noch mehr Freiheitsgraden erlaubt es, diese Einschränkung fallen zu lassen. Abbildung 2 zeigt eine erheblich aufwändigere Beschreibung des räumlichen Systemverhaltens eines Triebstranges, bei dem diverse andere Komponenten mit ihrer Dynamik berücksichtigt werden. Die Effekte, die mit solchen MKS-Modellen beschrieben werden können, kommen dem realen Systemverhalten auch im Detail schon recht nahe und können durch experimentelle Untersuchungen sogar quantitativ bestätigt werden.

Um den Umfang nicht zu sprengen, beschränkt sich das Buch auf lineare, oder genauer linearisierbare, zeitinvariante und periodisch zeitvariante Systeme mit deterministischen Eingängen. Nichtlineare Effekte tauchen in der Ingenieurspraxis meist im direkten Zusammenhang der technischen Anwendung auf und die Vielfalt ist nahezu unbegrenzt und ist im Rahmen dieses Werks nicht abzudecken. Deshalb wird für die Behandlung nichtlinearer Effekte auf die einschlägige Literatur hingewiesen. Dies bedeutet für den interessierten Leser notwendigerweise eine eigene, umfassende Recherche.



**Abb. 2** MKS Modell eines Fahrzeugtriebstrangs. (Wir danken der Fa. Daimler AG, Sindelfingen für die Bereitstellung dieses Bildes)

Die Grundgleichung, auf die es am Ende einer Modellbildung hinausläuft, sieht immer wieder gleich aus, egal wie viel Freiheitsgrade dem System „zugebilligt“ wurden oder ob es sich ursprünglich sogar um ein Kontinuum mit formal unendlich vielen Freiheitsgraden handelte. Strukturdynamische Modelle liefern meist einen Satz von linearen Bewegungsgleichungen 2. Ordnung:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{S}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{p}}$$

Die Massen-, und Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{S}$  sind quadratische Matrizen vom Format  $N \times N$ . Die Ableitungen nach der Zeit sind durch  $\dot{\phantom{x}}$  gekennzeichnet. Linear wird das Bewegungsgleichungssystem deshalb, weil wir uns auf die Betrachtung kleiner Schwingungen beschränken. Beim obigen Beispiel des Fahrzeugs können klein bei der Tauchschwingung durchaus 10 cm bedeuten, bevor Gummipuffer als Anschläge wirksam werden und die Kennlinie nichtlinear wird. In den meisten Fällen kann man von zeitinvarianten Bewegungsgleichungen ausgehen bei denen die Systemmatrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{S}$  zeitunabhängig bleiben. Am Ende dieses Bandes werden wir uns noch dem Bereich periodisch zeitvarianter Systeme zuwenden, bei denen die Matrizen dann ebenfalls zeitabhängig sind.

Im ersten Teil des Bands gehen wir also von diskreten Systembeschreibungen aus. Hierzu werden die Grundlagen der Schwingungslehre anhand von einfachen technischen Systemen mit wenigen Freiheitsgraden für die Modellbeschreibung erklärt. Anders als in anderen Büchern über lineare Schwingungssysteme üblich, werden allerdings bereits auch Selbsterregungsmechanismen vorgestellt. Diese spielen in der Rotordynamik, Fahrzeugtechnik und Aeroelastik eine große Rolle.

In Kap. 1 wird zunächst der simple Einmassenschwinger mit allen daraus ableitbaren Phänomenen erklärt. Es werden dabei sowohl die freien Schwingungen behandelt als auch die Behandlung erzwungener Schwingungen im Frequenz- und Zeitbereich.

Kapitel 2 und 3 analysiert lineare Systeme mit zwei und mehr Freiheitsgraden. Zunächst werden verschiedene Möglichkeiten der Formulierung der Bewegungsgleichungen vorgestellt, dann die Behandlung der freien und erzwungenen Schwingungen in gekoppelter Schreibweise.

Daran anschließend wird in Kap. 4 und 5 gezeigt, dass sich das System von gekoppelten Bewegungsdifferentialgleichungen durch modale Behandlung in entkoppelte Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung zerlegen lässt. Der Grad der Formalisierung nimmt hierbei zwangsläufig zu, was sich aber durchaus nicht negativ auf die Anschauung auswirkt. Insbesondere das Verhalten von ungedämpften oder proportionalgedämpften Strukturen wird durch die formale Zerlegung, die eine Rückführung auf die Schwingen von einem Freiheitsgrad bedeutet, physikalisch erst transparent. Die modale Zerlegung erlaubt es auch in sehr eleganter Weise, die Empfindlichkeit linearer Systeme gegen Parameteränderungen zu untersuchen. Außerdem liefern diese beiden Kapitel ein gutes Verständnis für die in der experimentellen Strukturanalyse häufig verwendeten Modal-Analysen.

In Kap. 6 wird ein Algorithmus aufgezeigt, mit dem der Rechner auch die Aufstellung von Bewegungsgleichungen diskreter Systemmodelle übernimmt. Dieses Kapitel liefert die Grundlagen für die schon erwähnten MKS-Programme, die mittlerweile kommerziell für die verschiedensten technische Anwendung, vor allem auch für nichtlineare Probleme, angeboten und als eines der Standardwerkzeuge besonders in der Fahrzeugentwicklung aber auch in der Windenergiebranche eingesetzt werden.

Kapitel 7 stellt als Erweiterung von Kap. 6 die Elementmatrizen für Rotoren, Gyrostaten und die Behandlung von Zwangsbedingungen vor.

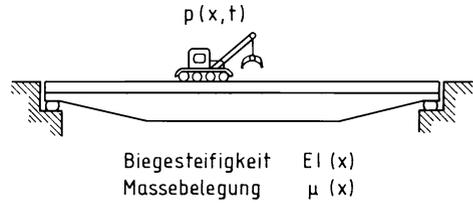
Der erste Teil des Bandes schließt mit dem Kap. 8 zur numerischen Behandlung von strukturdynamischen Analysen. Darin sind einige Gesichtspunkte zusammengestellt, die es zu beachten gilt, wenn man eigene Berechnungsprogramme zur numerischen Lösung erstellt. Die kommerziellen FEM- und MKS-Algorithmen haben interne numerische Löser, zu denen der Nutzer nur sehr selten Zugang hat und die wir in diesem Kapitel auch nicht behandeln wollen.

Im zweiten Teil des Bandes „Strukturdynamik“ wenden wir uns den kontinuierlichen Systemen zu, d. h. Systemen, bei denen Elastizität und Masse kontinuierlich verteilt sind. Sie haben daher unendlich viele Freiheitsgrade. Mathematisch führt das auf eine Beschreibung durch partielle – orts- und zeitabhängige – Differentialgleichungen.

$$[EI(x)\tilde{w}''(x)]'' + \mu(x)\tilde{w}''(x) = \tilde{p}(x)$$

Ein einfaches und vor allem einleuchtendes Beispiel für ein derartiges kontinuierliches System ist der Brückenträger als Biegebalkenmodell von Abb. 3, bei dem die Biegesteifigkeit  $EI(x)$  und die Massebelegung  $\mu(x)$  auch noch ortsabhängig sind. Die Ableitungen nach dem Ort sind durch  $'$ , die nach der Zeit durch  $\dot{\phantom{x}}$  gekennzeichnet. Als Lösung der partiellen Bewegungsdifferentialgleichung unter einer ortsverteilter dynamischen Last  $\tilde{p}(x)$  erhält man orts- und zeitabhängige Biegeschwingungen  $\tilde{w}(x)$ .

**Abb. 3** Brückenträger mit veränderlicher Massebelegung  $\mu(x)$  und Biegesteifigkeit  $EI(x)$



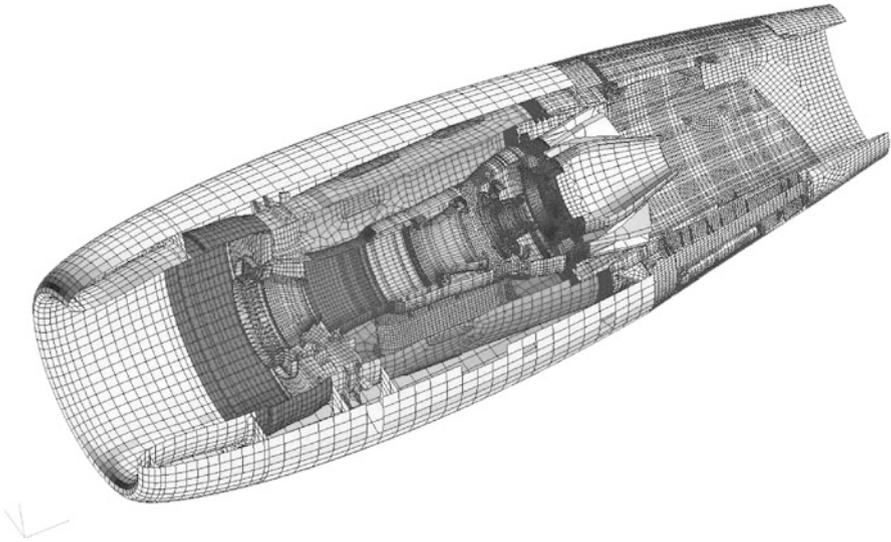
Geschlossene, analytische Lösungen der partiellen Differentialgleichungen von schwingenden Balken, Platten, Schalen usw. lassen sich nur in ganz wenigen Fällen angeben. Trotzdem sind derartige analytische Lösungen von Interesse, weil sich an ihnen prinzipielle Systemeigenschaften sehr leicht studieren lassen.

Bei einem kontinuierlichen System wie dem Luftfahrttriebwerk aus Abb. 4 oder der Fahrzeugkarosserie aus Abb. 5 ist eine analytische Lösung bei aller Idealisierungskunst nicht mehr möglich. Eine Modellierung als Mehrkörpersystem ist bei der Vielzahl an dünnen und vielfach verzweigten Strukturen aber ebenfalls nicht sinnvoll. Hier hilft die Methode der Finiten Elemente weiter. Dabei zerlegt man die Gesamtstruktur mit Hilfe von Ansatzfunktionen zunächst in Elemente und Abschnitte, die sich wesentlich einfacher behandeln lassen als die Gesamtstruktur. Unter Berücksichtigung der Rand- und Übergangsbedingungen an den Elementengrenzen wird dann ein Gleichungssystem für das Gesamtsystem aufgebaut. Dieses liegt nun wieder in diskreter Form vor

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{\bar{p}}$$

und lässt sich, wie im ersten Teil des Bandes erklärt, entsprechend lösen. Die Behandlung von Kontinua mit der Finiten Elemente Methode führt je nach Elementierungsgrad zu verhältnismäßig großen Gleichungssystemen, die numerisch gelöst werden müssen. Die Abb. 4 und 5 zeigen FE-Modelle mit mehreren hunderttausend bzw. weit über einer Million Freiheitsgrade. Dies führt selbst in unserem Zeitalter moderner Rechentechnik zu teilweise erheblichen Rechenzeiten. Da während der Entwicklungszeit unterschiedlichste Varianten einer Konstruktion berechnet werden und hierzu Parameterstudien durchgeführt werden müssen, lohnt sich eine Reduktion der Gesamtsystemgröße damit diese Analysen wesentlich schneller und variantenreicher ablaufen können. Um diese Systeme zu reduzieren ohne ihre physikalische Information zu beschneiden, benötigt man Reduktionsmethoden und Substrukturtechniken, die in diesem Buch ebenfalls vorgestellt werden. In den kommerziellen FEM-Programmen werden diese Methoden zwar unterstützt und meist schon automatisch verwendet, trotzdem sollte man als Anwender diese Techniken kennen, um später die numerischen Ergebnisse richtig interpretieren zu können.

Kapitel 9 stellt die recht ausführlich die Herleitung und analytische Lösung einfacher schwingender Kontinua anhand des Biegebalkens vor. Anschließend folgt eine Darstellung der Herleitungen der Gleichungen für ebene Flächentragwerke, wie Platten und Scheiben, sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten.



**Abb. 4** FEM-Gesamtstrukturmodell eines Luftfahrttriebwerks für die statische und dynamische Strukturanalyse. (Wir danken Rolls-Royce für die Bereitstellung dieses Bildes)

In Kap. 10 wird gezeigt, wie mit Hilfe der modalen Analyse die Lösungen der partiellen Bewegungsgleichungen von Kap. 9 für beliebige Lastfälle in eleganter und physikalisch transparenter Form formuliert werden können. Die Analogie zur modalen Analyse diskreter Systeme aus Kap. 4 fällt hier unmittelbar an.

Kapitel 11 stellt einen Vorläufer der Finiten Elemente Methode dar. Das Verfahren der Übertragungsmatrizen eignet sich vor allem bei unverzweigten Strukturen wie Antriebsträngen oder Durchlaufträgern. Man kann damit auf sehr effiziente Weise die Eigenformen und Eigenfrequenzen aber auch Systemantworten bei harmonisch erzwungen Schwingungen ermitteln. Als erstes, speziell auf den Computer zugeschnittenes Berechnungsverfahren besticht es durch seine kompakte Formulierung und seine Rechnerökonomie. Mit dem Verfahren der Übertragungsmatrizen werden aber auch die Grenzen der Differentialgleichungsverfahren erreicht.

Die weiterreichenden Energieverfahren werden mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen in Kap. 12 vorgestellt. Das Prinzip bildet dabei die Ausgangsbasis für die Näherungsverfahren und wird hier für Durchlaufträger, Rahmentragwerke und Platten hergeleitet.

Kapitel 13 legt mit dem Rayleigh-Quotienten und dem Ritzschen Verfahren die beiden klassischen Näherungsverfahren dar, die mit globalen, d. h. über die ganze Struktur laufenden Ansatzfunktionen arbeiten. Typisch für diese Verfahren – wie auch für die anschließend vorgestellte FE-Methode – ist, dass durch die Einführung von Ansatzfunktionen aus der partiellen Differentialgleichung ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen entsteht, wie wir es von diskreten Systemen her kennen.

In Kap. 14 wird das schon hier mehrfach erwähnte Standardverfahren der numerischen Behandlung von strukturdynamischen Aufgabenstellungen, die Methode der Finiten Elemente (FEM) vorgestellt. Anstatt wie beim Ritzschen-Verfahren globale Ansatzfunktionen zu verwenden, diskretisiert die FEM die Gesamtstruktur mit lokalen Ansatzfunktionen, was dann ebenfalls auf ein gewöhnliches Gleichungssystem führt.

Durch Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften lassen sich deutlich kleinere Gleichungssysteme erzeugen. Mit jeder Symmetrieebene lässt sich die Zahl der Freiheitsgrade etwa halbieren, dies wird in Kap. 15 gezeigt. Eine solche Symmetrienausnutzung hilft sowohl bei Rechnungen per „Hand“ als auch bei großen FE-Modellen. Zum Beispiel macht es in vielen Fällen keinen Sinn, die gesamte Verdichterscheibe eines Triebwerks mit allen Schaufeln zu modellieren, sondern oft reicht auch einfach ein 8tel oder 16tel des Kreises. Dieses schlanke „Tortenstück“ kann dafür viel feiner elementiert werden, und die Aussagequalität lässt sich damit erheblich steigern. Die Information über den Rest der Scheibe und Schaufeln erhält man durch Spiegelung des Ergebnisses für das „Tortenstück“ an den Symmetrieebenen.

Kapitel 16 beschäftigt sich mit der statischen oder dynamischen Kondensation, mit denen die Zahl der Freiheitsgrade großer Gleichungssysteme drastisch reduziert werden können, ohne dabei einen nennenswerten Genauigkeitsverlust zu erleiden.

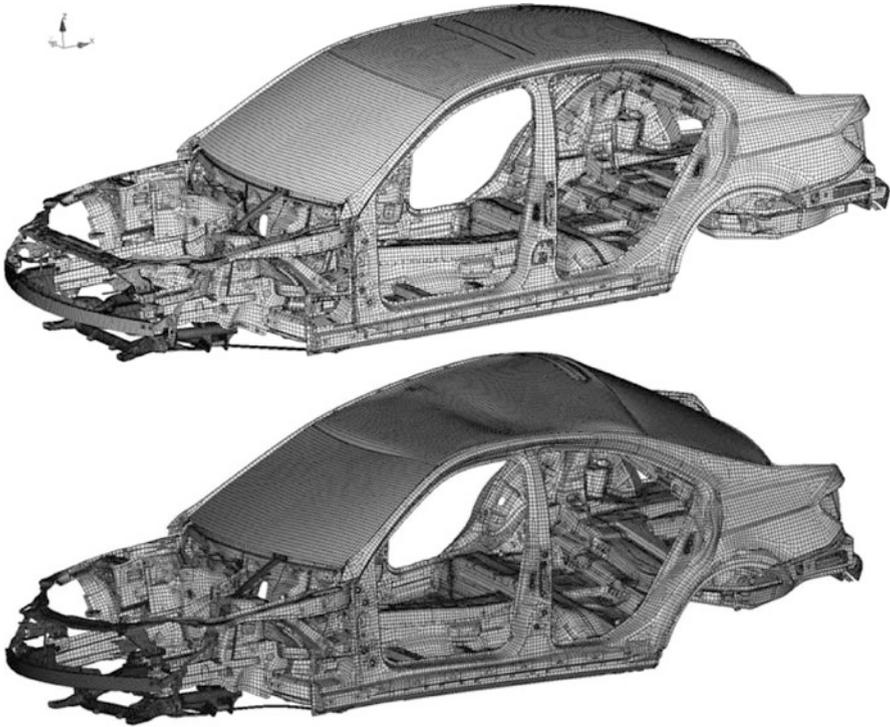
Wie die Vorgehensweise von Kap. 15 und 16 bei sehr großen Strukturen gleichzeitig oder mehrfach hintereinandergeschaltet eingesetzt werden können, wird in Kap. 17 vorgeführt. Zwei mögliche Vorgehensweisen, die modale Synthese mit gefesselten Koppelstellen und die modale Synthese mit freien Koppelstellen werden anhand von durchgerechneten Beispielen verglichen.

Die letzten beiden Kapitel beschäftigen sich mit sehr speziellen Problemen der Strukturdynamik.

In Kap. 18 wird diskutiert, wie die FE-Gleichungen eines nicht rotierenden Systems zu erweitern sind, wenn dieses System, z. B. ein Propeller oder eine Windenergieanlage, um eine feste Achse rotiert.

Eine Neuerung dieser Auflage der „Strukturdynamik“ ist eine vollständige Darstellung der Behandlung von periodisch zeitvarianten Systemen – also Systemen, deren Systemmatrizen nicht wie bisher konstant sondern periodisch zeitabhängig sind. Diese Thematik wird in Kap. 19 behandelt. Typische Beispiele für solche Systeme sind Hubschrauberrotoren, die Magnetschwebbahn oder Schienenfahrzeuge auf Gleis.

Es muss noch auf eine weitere Tatsache in der modernen Strukturdynamik Bezug genommen werden. Findet die „Globalisierung“ in der Welt auf politisch, kulturellem und vor allem ökonomischen Wege statt, so kann man eine solche Tendenz zur Zusammenarbeit in entsprechender Analogie auch für die Technik erkennen. Wurde früher ein Systemverhalten untersucht, so tendierte man zu getrennten Beschreibungen der einzelnen Funktionen wie zum Beispiel Mechanik, Elektronik, Regelungstechnik, Fluid- und Aerodynamik. Dies war meist den begrenzten numerischen Rechenfähigkeiten geschuldet. Heutzutage existieren gesamtheitliche Ansätze zur Systembeschreibung, die viele Disziplinen und ihre Berechnungsmodelle zusam-



**Abb. 5** FEM Modell einer Fahrzeugkarosserie und stark überhöhte Darstellung der 1. Torsionseigenform. (Wir danken der Fa. Daimler AG, Sindelfingen für die Bereitstellung dieser Bilder)

menführen. Ein klassisches Beispiel hierfür stellen die mechatronischen Systeme dar, welche die Mechanik, die Regelungstechnik und die Elektrotechnik verbinden. Aber auch die wichtige Interaktion zwischen Struktur und Strömung vor allem im Turbomaschinenbereich und bei den Windenergieanlagen sei hier erwähnt. Ein weiteres immer wichtiger werdendes Thema ist die Verknüpfung der Strukturmechanik mit der Festigkeits- und Lebensdaueranalyse oder sogar mit der Bruchmechanik. Schwingungen verursachen Strukturschädigungen wie Risse oder komplette Brüche, die wiederum durch Lastumlagerungen, zumindest bei statisch überbestimmten Strukturen, zu neuen dynamischen Systemen mit anderen Eigenschaften führen. Diesen Umstand versucht man mittlerweile in einigen Industriebereichen für den Leichtbau und die Systemzuverlässigkeit auszunutzen. Die moderne Strukturmechanik lässt sich also eigentlich nicht mehr separat betrachten. Zukünftig werden die rein mechanischen Modelle um die elektronischen oder aerodynamischen Modelle erweitert und müssen auch zusammen als ein Gesamtsystem behandelt werden. Dieser Tatsache wird in dieser Neuauflage noch nicht Rechnung getragen. Die Autoren sind noch in der Diskussion, in wie weit sich das Buch in diese Richtung zukünftig bewegen soll.

# Inhaltsverzeichnis

## Teil I Diskrete Systeme

<b>1</b>	<b>Das System von einem Freiheitsgrad</b>	3
1.1	Vorbemerkung	3
1.2	Kleine Phänomenologie linearer Schwinger von einem Freiheitsgrad	3
1.2.1	Beispiele für freie Schwingungen	4
1.2.2	Beispiele für erzwungene Schwingungen	12
1.3	Freie Schwingungen – Eigenverhalten	18
1.3.1	Das ungedämpfte System, $D = 0$	20
1.3.2	Das gedämpft schwingende System, $0 < D < 1$	24
1.3.3	Kriechvorgänge, $D \geq 1$	27
1.3.4	Das entdämpfte, selbsterregende System, $-1 < D < 0$	28
1.3.5	Monotone Instabilität – Divergenz, $D \leq -1$	29
1.3.6	Wurzelortskurvendarstellung	29
1.3.7	Negative Steifigkeit, statische Instabilität	31
1.3.8	Zusammenfassung	33
1.4	Erzwungene Schwingung – Behandlung im Frequenzbereich	34
1.4.1	Harmonische Erregung	35
1.4.2	Allgemeine, periodische Erregung	42
1.4.3	Allgemeine, transiente Erregung	45
1.4.4	Komplexe Schreibweise	51
1.4.5	Numerische Realisierung der Fourier-Transformation und die Fast-Fourier-Transformation	64
1.5	Erzwungene Schwingungen – Behandlung im Zeitbereich	69
1.5.1	Einige spezielle Stoßantwortfunktionen	70
1.5.2	Die Duhamel’schen Integrale	74
1.5.3	Ein Übertragungsverfahren	77
	Literaturverzeichnis	85

<b>2</b>	<b>Bewegungsdifferentialgleichungen für Systeme von zwei oder mehr Freiheitsgraden</b> .....	87
2.1	Das Verfahren der Steifigkeitszahlen .....	87
2.1.1	Erläuterung des Verfahrens an einem zweigeschossigen Stockwerkrahmen .....	87
2.1.2	Erweiterung des Verfahrens: Biegeschwingungen unter Berücksichtigung von Massen und Drehmassen .....	92
2.1.3	Bewegungsdifferentialgleichung für das Doppelpendel, aufgestellt mit dem Verfahren der Steifigkeitszahlen .....	96
2.2	Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichungen mit dem Prinzip der virtuellen Verrückung .....	98
2.3	Mathematische Eigenschaften von Steifigkeits-Massenmatrix .....	110
2.3.1	Symmetrie der Steifigkeitsmatrix bei Systemen mit potentieller Energie .....	110
2.3.2	Positive Definitheit .....	114
2.3.3	Bandstruktur .....	116
	Literaturverzeichnis .....	119
<b>3</b>	<b>Freie und erzwungene Schwingungen von Zwei- und Mehr-Freiheitsgradsystemen – Behandlung als gekoppeltes System</b> .....	121
3.1	Freie Schwingungen – Eigenverhalten .....	121
3.1.1	Eigenschwingungen eines ungedämpften Systems von zwei Freiheitsgraden .....	122
3.1.2	Eigenschwingungen eines gedämpften Systems .....	133
3.1.3	Eigenschwingungen eines selbsterregungsfähigen Systems .....	143
3.1.4	Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe von Beiwertbedingungen oder der Hurwitz-Determinante .....	154
3.2	Erzwungene Schwingungen von Mehr-Freiheitsgradsystemen – Behandlung im Frequenzbereich .....	160
3.2.1	Partikuläre und homogene Lösung .....	160
3.2.2	Harmonische Erregung .....	161
3.2.3	Übergang auf allgemeine periodische Erregung und transiente Erregung .....	173
3.3	Behandlung erzwungener Schwingungen durch Lösung des gekoppelten Systems im Zeitbereich .....	175
3.3.1	Allgemeine Überlegungen zur Integration .....	175
3.3.2	Vollständige Lösung für das Mehr-Freiheitsgradsystem und Vergleich mit der Duhamel-Lösung des Einmassenschwingers – das Faltungsintegral .....	181
	Literaturverzeichnis .....	185
<b>4</b>	<b>Die modale Analyse bei ungedämpften Strukturen und Strukturen mit Proportionaldämpfung</b> .....	187
4.1	Die modale Entkopplung des ungedämpften Systems (Typ I) .....	189

4.2	Die modale Analyse bei Strukturen mit proportionaler Dämpfung (Typ II) .....	194
4.3	Harmonische Erregung – das Resonanzverhalten proportional gedämpfter Strukturen in modaler Darstellung .....	197
4.4	Modale Behandlung transienter Vorgänge im Zeitbereich .....	205
4.4.1	Freie Schwingungen infolge von Anfangsbedingungen ....	205
4.4.2	Erzwungene Schwingungen .....	207
4.4.3	Die Response-Spektren-Methode .....	213
4.5	Anmerkungen zur Proportionaldämpfung .....	218
4.6	Kriterien für das Weglassen von modalen Freiheitsgraden bei der Integration der Bewegungsgleichungen .....	221
	Literaturverzeichnis .....	224
<b>5</b>	<b>Die modale Analyse bei Systemen mit starker Dämpfung oder Neigung zur Selbsterregung .....</b>	<b>225</b>
5.1	Modale Zerlegung des stark gedämpften Systems (Typ III) .....	226
5.2	Modale Zerlegung des allgemeinen mechanischen Systems (Typ IV) .....	230
5.3	Resonanzverhalten stark gedämpfter und selbsterregungsfähiger Systeme in modaler Darstellung .....	237
5.4	Modale Behandlung transienter Vorgänge im Zeitbereich .....	243
5.4.1	Freie Schwingungen infolge von Anfangsbedingungen ....	243
5.4.2	Erzwungene Schwingungen .....	244
5.5	Modale Zerlegung bei Doppel-Eigenwerten mit gleichen Eigenvektoren .....	248
5.6	Erfassung des Einflusses von Parameteränderungen – Sensitivität ..	250
	Literaturverzeichnis .....	257
<b>6</b>	<b>Algorithmus zum formalisierten Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichungen von Mehrkörpersystemen ....</b>	<b>259</b>
6.1	Vorbemerkung .....	259
6.2	Modellierung eines Personenkraftwagens als ebenes Mehrkörpersystem .....	260
6.3	Ebene Mehrkörpersysteme .....	261
6.4	Erfassung der Fußpunktanregung .....	278
6.5	Einige Hinweise zu räumlichen Systemen .....	279
	Literaturverzeichnis .....	282
<b>7</b>	<b>Die Elementmatrizen von Rotoren, Gyrostaten, vorgespannten Federn und die Behandlung von Zwangsbedingungen .....</b>	<b>283</b>
7.1	Kinematische Überlegungen .....	283
7.2	Impulssatz, Drallsatz und Newton-Euler-Gleichungen des bewegten, starren Körpers .....	295
7.3	Matrizen für die Elemente „Rotor“ und „Gyrostat“ .....	302

7.4	Erweiterung des Prinzips beim Auftreten von kinematischen Zwangsbedingungen und von Anfangslasten . . . . .	307
7.4.1	Vorbemerkung . . . . .	307
7.4.2	Ein Prinzip der virtuellen Arbeiten ohne a-priori-Erfüllung der Zwangsbedingungen . . . . .	308
7.4.3	Prinzip der virtuellen Arbeiten für Schwingungen um einen Bezugsstand (statische Ruhelage) . . . . .	312
7.4.4	Aufbau des Systems von Bewegungsgleichungen . . . . .	319
7.4.5	Elementmatrizen und Elementvektoren für Dehnsfedern . . . . .	322
7.4.6	Ein Beispiel . . . . .	327
	Literaturverzeichnis . . . . .	330
<b>8</b>	<b>Anmerkungen zur numerischen Lösung . . . . .</b>	<b>331</b>
8.1	Superposition . . . . .	332
8.2	Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	333
8.3	Lösen der Eigenwertprobleme . . . . .	336
8.3.1	Transformation der allgemeinen in die spezielle Eigenwertaufgabe – statische Kondensation – Shift . . . . .	336
8.3.2	Einige Eigenschaften der Eigenwertaufgabe . . . . .	339
8.3.3	Vektoriterationsverfahren . . . . .	340
8.3.4	Transformationsverfahren . . . . .	343
8.3.5	Determinantensuchverfahren . . . . .	346
8.3.6	Bisektionsverfahren . . . . .	349
8.4	Numerische Integration . . . . .	349
	Literaturverzeichnis . . . . .	350
 <b>Teil II Kontinua und ihre Diskretisierung</b>		
<b>9</b>	<b>Analytische Lösungen einfacher schwingender Kontinua . . . . .</b>	<b>355</b>
9.1	Einleitung . . . . .	355
9.2	Aufstellung und Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung des schubstarren biegeelastischen Balkens . . . . .	356
9.2.1	Differentialgleichung, Randbedingungen, Anfangsbedingungen . . . . .	356
9.2.2	Lösung der Differentialgleichung und Einbau der Randbedingungen . . . . .	359
9.2.3	Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingungen . . . . .	365
9.2.4	Zusammenfassung . . . . .	367
9.3	Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung bei harmonischer Erregung – eingeschwungener Zustand . . . . .	367
9.4	Der biegeelastische Balken mit Zusatzeffekten . . . . .	374
9.4.1	Elastisch gebetteter Biegebalken . . . . .	374
9.4.2	Biegebalken mit axialer Normalkraft im Ausgangszustand . . . . .	376
9.4.3	Der Biegebalken mit Schubelastizität und Drehträgheit (Timoshenko-Balken) . . . . .	378

9.4.4	Eigenfrequenzen des Biegebalkens mit Zusatzeffekten . . . . .	381
9.4.5	Biegebalken mit Proportionaldämpfung . . . . .	384
9.5	Ebene Flächentragwerke . . . . .	386
9.5.1	Bewegungsgleichungen für Scheiben und Platten in kartesischen Koordinaten . . . . .	386
9.5.2	Bewegungsgleichungen für ebene Flächentragwerke in Polarkoordinaten . . . . .	389
9.5.3	Anmerkungen zu analytischen Lösungen bei Platten . . . . .	391
	Literaturverzeichnis . . . . .	392
<b>10</b>	<b>Geschlossene Lösung einfacher schwingender Kontinua . . . . .</b>	<b>395</b>
10.1	Einleitung . . . . .	395
10.2	Orthogonalitätsbeziehungen für Balken mit einfachen Randbedingungen . . . . .	396
10.3	Freie Schwingungen: Die Anpassung an die Anfangsbedingungen durch modales Vorgehen . . . . .	399
10.4	Lösung für allgemeine, transiente Erregung . . . . .	401
10.5	Harmonische Erregung – Resonanzverhalten in modaler Darstellung . . . . .	405
10.6	Dämpfungseinfluss . . . . .	408
10.7	Bilanz zur modalen Betrachtungsweise und Verallgemeinerung . . . . .	412
	Literaturverzeichnis . . . . .	415
<b>11</b>	<b>Das Verfahren der Übertragungsmatrizen . . . . .</b>	<b>417</b>
11.1	Einleitung . . . . .	417
11.2	Einige Übertragungsmatrizen . . . . .	418
11.3	Das Übertragungsschema zur Eigenfrequenz- und Eigenformberechnung . . . . .	422
11.4	Weiche, steife und starre Zwischenstützen . . . . .	428
11.5	Erzwungene, periodische Schwingungen . . . . .	431
11.6	Harmonische Erregung in einer kettenförmigen Struktur mit Grenzen im Unendlichen . . . . .	433
11.7	Gesamtgleichungssystem und verzweigte Strukturen . . . . .	439
11.8	Numerische Schwierigkeiten . . . . .	442
11.9	Vorzüge und Grenzen des Übertragungsmatrizenverfahrens . . . . .	444
	Literaturverzeichnis . . . . .	445
<b>12</b>	<b>Energieformulierungen als Grundlage für Näherungsverfahren . . . . .</b>	<b>447</b>
12.1	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für Durchlaufträger und ebene Rahmentragwerke . . . . .	449
12.1.1	Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen . . . . .	451
12.1.2	Gleichwertigkeit des Prinzips der virtuellen Verrückungen mit den Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	453
12.1.3	Weitere Umformung des PdvV . . . . .	455
12.1.4	Zulässige Verschiebungszustände . . . . .	456

12.1.5	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für ebene Rahmentragwerke .....	457
12.2	Ableitung der Orthogonalitätsrelation mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen .....	458
12.3	Prinzip der virtuellen Verrückungen für andere Kontinua .....	460
12.3.1	Nicht-dünnwandiger, räumlicher Stab mit doppelt- symmetrischem Querschnitt .....	460
12.3.2	Orthotrope, schubstarre Platte .....	465
12.3.3	Schubweiche Platte .....	466
12.3.4	Schubweiche Platte in Polarkoordinaten .....	467
12.3.5	Andere Kontinua .....	468
	Literaturverzeichnis .....	469
<b>13</b>	<b>Der Rayleigh-Quotient und das Ritz'sche Verfahren</b> .....	<b>471</b>
13.1	Der Rayleigh-Quotient .....	471
13.1.1	Definition des Rayleigh-Quotienten .....	471
13.1.2	Minimaleigenschaft des Rayleigh-Quotienten .....	473
13.1.3	Rayleigh-Quotient für höhere Eigenfrequenzen .....	474
13.1.4	Möglichkeiten zur Verbesserung der Ansatzfunktion .....	475
13.2	Das Ritz'sche Verfahren zur Eigenschwingungsberechnung .....	476
13.2.1	Grundgedanke des Ritz'schen Verfahrens .....	476
13.2.2	Beispielrechnung .....	478
13.2.3	Minimaleigenschaften der mit dem Ritz'schen Verfahren ermittelten Eigenfrequenzen, Genauigkeit und Konvergenzverhalten .....	480
	Literaturverzeichnis .....	483
<b>14</b>	<b>Die Methode der finiten Elemente</b> .....	<b>485</b>
14.1	Einleitung .....	485
14.2	Methode der finiten Elemente für Durchlaufträger (Stabzüge) .....	487
14.2.1	Zerlegung in Einzelemente .....	488
14.2.2	Behandlung der Einzelemente eines Durchlaufträgers .....	490
14.2.3	Zusammenbau der Einzelemente zum Gesamtsystem .....	495
14.2.4	Praktisches Vorgehen zum Aufstellen der Systemmatrizen und -vektoren (Indextafel-Organisation) .....	497
14.2.5	Schnittkraftermittlung .....	501
14.2.6	Zusammenfassung .....	503
14.3	Methode der finiten Elemente für ebene und räumliche Rahmentragwerke .....	505
14.3.1	Voraussetzungen .....	506
14.3.2	Elementmatrizen und Elementvektoren .....	506
14.3.3	Koordinatentransformation .....	509
14.3.4	Gelenke und Mechanismen, Zwangsbedingungen .....	511
14.4	Elementmatrizen für Stäbe mit Schubweichheit, Drehmassenbelegung und Vorspannung .....	511

14.5	Finite-Elemente-Verfahren für Platten . . . . .	514
14.5.1	Vorbemerkung . . . . .	514
14.5.2	Elementmatrizen für schubstarre Platten . . . . .	514
14.5.3	Elementmatrizen für schubweiche Platten . . . . .	521
14.6	Finite-Element-Verfahren auf der Grundlage gemischt-hybrider Arbeitsausdrücke . . . . .	523
	Literaturverzeichnis . . . . .	527
<b>15</b>	<b>Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften . . . . .</b>	<b>531</b>
15.1	Ein einfaches Beispiel . . . . .	532
15.2	Allgemeine Regel für die Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften bei dreidimensionalen Strukturen . . . . .	534
15.3	Berechnung der Eigenschwingungen eines Radsatzes bei Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften . . . . .	537
	Literaturverzeichnis . . . . .	543
<b>16</b>	<b>Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade . . . . .</b>	<b>545</b>
16.1	Der Formalismus der Reduktion . . . . .	546
16.2	Statische Kondensation . . . . .	547
16.3	Die modale Kondensation unter Verwendung eines benachbarten, konservativen Hilfssystems . . . . .	553
16.4	Gemischte statische und modale Kondensation zur Beibehaltung wichtiger physikalischer Freiheitsgrade im reduzierten System . . . . .	555
16.5	Vergleich der drei Reduktionsverfahren . . . . .	560
16.6	Kondensation bei Systemen mit lokalen Nichtlinearitäten . . . . .	561
	Literaturverzeichnis . . . . .	562
<b>17</b>	<b>Substrukturtechniken . . . . .</b>	<b>563</b>
17.1	Vorbemerkung . . . . .	563
17.2	Modale Synthese bei Verwendung von Substrukturen, die an den Koppelstellen gefesselt sind . . . . .	567
17.3	Modale Synthese bei Verwendung von Substrukturen mit freien Koppelstellen . . . . .	576
17.3.1	Ein einfaches Beispiel . . . . .	577
17.3.2	Modale Synthese für unverschiebliche Substrukturen mit freien Koppelstellen . . . . .	584
17.3.3	Die Modifikation des Verfahrens nach Craig und Chang . . . . .	591
17.4	Genauigkeit und Konvergenzverhalten bei der modalen Synthese . . . . .	592
17.5	Übersicht über die modalen Syntheseverfahren . . . . .	597
	Literaturverzeichnis . . . . .	597
<b>18</b>	<b>Bewegungsgleichungen von rotierenden elastischen Strukturen . . . . .</b>	<b>599</b>
18.1	Bewegungsgleichungen des rotierenden Punktmassenmodells . . . . .	600
18.1.1	Mechanisches Modell . . . . .	600
18.1.2	Kinematik des Massenpunktes . . . . .	601

18.1.3	Auswertung der Massenterme des Prinzips der virtuellen Verrückungen . . . . .	603
18.1.4	Gesamtgleichungssystem der rotierenden Punktmassenstruktur . . . . .	604
18.1.5	Diskussion der Bewegungsgleichungen . . . . .	605
18.2	Bewegungsgleichungen der rotierenden Struktur mit kontinuierlicher Massenverteilung – konsistente Modellierung .	606
18.2.1	Mechanisches Modell . . . . .	607
18.2.2	Kinematik des Massenpunktes . . . . .	607
18.2.3	Auswertung der Massenintegralterme des Prinzips der virtuellen Verrückungen . . . . .	609
18.2.4	Finite-Elemente-Diskretisierung . . . . .	610
18.2.5	Gesamtgleichungssystem der rotierenden Struktur . . . . .	611
18.3	Modale Kondensation zur Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade der rotierenden Struktur . . . . .	613
18.4	Bewegungsgleichungen von gekoppelten rotierenden und nicht rotierenden Strukturen . . . . .	613
	Literaturverzeichnis . . . . .	614
<b>19</b>	<b>Stabilität von periodisch zeitvarianten Systemen –</b>	
	<b>Parametererregung . . . . .</b>	<b>615</b>
19.1	Vorbetrachtung: Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt; Stabilität der Mathieu'schen Differentialgleichung . . . . .	616
19.2	Parameterresonanzen bei Mehr-Freiheitsgradsystemen . . . . .	620
19.3	Stabilitätsuntersuchung nach Floquet . . . . .	622
19.4	Stabilitätsuntersuchung nach Hill . . . . .	628
19.5	Kleiner Vergleich der Stabilitätsuntersuchungen nach Floquet und Hill . . . . .	633
19.6	Modale Behandlung linearer periodisch zeitvarianter Bewegungsgleichungen . . . . .	635
19.6.1	Die Orthogonalitätsbedingung des linearen zeitvarianten Systems und seine Transformation in ein zeitinvariantes entkoppeltes System . . . . .	635
19.6.2	Der Hill'sche Ansatz für die homogene Lösung des periodisch zeitvarianten Systems und die Fundamentalmatrix . . . . .	637
19.6.3	Aufbau und Inversion der Transformationsmatrix . . . . .	641
19.6.4	Ermittlung von erzwungenen Schwingungen auf modalem Weg . . . . .	643
19.6.5	Direkte Gewinnung der Antwort bei rein harmonischer Erregung . . . . .	648
19.6.6	Ein technisches Beispiel . . . . .	650
	Literaturverzeichnis . . . . .	652

Inhaltsverzeichnis	XXV
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	655
<b>Sachverzeichnis</b> .....	663

**Teil I**  
**Diskrete Systeme**

# Kapitel 1

## Das System von einem Freiheitsgrad

### 1.1 Vorbemerkung

Viele technische Systeme sind Schwinger von einem Freiheitsgrad. Auch recht komplizierte Strukturen lassen sich oft auf Systeme von einem Freiheitsgrad zurückführen, wenn Symmetrien ausgenutzt werden. Darüber hinaus besteht die Bedeutung des Ein-Freiheitsgradsystems darin, dass an ihm alle wesentlichen Phänomene des Eigenverhaltens linearer Systeme erläutert werden können (Abschn. 1.3). Noch wichtiger wird das Ein-Freiheitsgradsystem schließlich dadurch, dass sich Schwinger von  $n$  Freiheitsgraden immer auf  $n$  Schwinger von einem Freiheitsgrad zurückführen lassen. Ein Schwingungssystem mag noch so kompliziert sein, es mag stark gedämpft, schwach gedämpft oder angefacht sein, die modale oder bimodale Zerlegung (Kap. 4 und 5), erlaubt den Übergang zum System von einem Freiheitsgrad.

### 1.2 Kleine Phänomenologie linearer Schwinger von einem Freiheitsgrad

In diesem Abschnitt werden anhand von Beispielen die wichtigsten Erscheinungen beschrieben, die an Schwingern von einem Freiheitsgrad auftreten können. Zunächst werden an fünf Beispielen die *freien Schwingungen* und ihre Ursachen diskutiert und die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Dann werden an drei weiteren Beispielen *erzwungene Schwingungen* und ihre Erregungsmechanismen erläutert. Die Lösung der Bewegungsgleichungen bleibt den nachfolgenden Abschnitten vorbehalten.

### 1.2.1 Beispiele für freie Schwingungen

*Beispiel 1. Freie, ungedämpfte Schwingungen eines Pendels infolge einer Anfangsauslenkung*

An jedem Hebezeug (Abb. 1.1), ist zu beobachten, wie die Last nach kurzem Anheben auspendelt, wenn der Kranhaken, ehe er eingehängt wurde, nicht senkrecht über der Last schwebte. Die Last führt kleine Schwingungen aus, die nur ganz langsam abklingen.

Die Bewegungsgleichung, die diesen Vorgang beschreibt, lässt sich mit Hilfe des 2. Newton'schen Gesetzes aufstellen, nach welchem die angreifende Kraft gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung ist:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} .$$

Zählt man den Winkel  $\tilde{\varphi}^1$  in der in Abb. 1.1 angegebenen Weise, so wirkt auf die Masse als Folge des Gewichtes  $mg$  in der zu  $\tilde{\varphi}$  entgegengesetzten Richtung die Rückstellkraft  $mg \sin \tilde{\varphi}$ . Die Bogenlänge zum Winkel  $\tilde{\varphi}$  ist  $l\tilde{\varphi}$ , die Beschleunigung beträgt dann  $l\ddot{\tilde{\varphi}}$ . Aus dem Newton'schen Gesetz erhält man daher die *nichtlineare Bewegungsgleichung*

$$ml\ddot{\tilde{\varphi}} = -mg \sin \tilde{\varphi}$$

oder

$$ml\ddot{\tilde{\varphi}} + mg \sin \tilde{\varphi} = 0 . \quad (1.1)$$

Zusätzlich zur Differentialgleichung müssen *Anfangsbedingungen* formuliert werden. Beim Beispiel von Abb. 1.1 gilt für die Anfangslage zur Zeit  $t = 0$

$$\tilde{\varphi}(t = 0) = \varphi_0 .$$

Eine Anfangsgeschwindigkeit existiert nicht.

$$\dot{\tilde{\varphi}}(t = 0) = \dot{\varphi}_0 = 0$$

Aus der Bewegungsgleichung (1.1) und den zugehörigen Anfangsbedingungen lässt sich eine Lösung gewinnen, die die freien Schwingungen des Pendels beschreibt. Solange man sich für *kleine Schwingungen* interessiert, lässt sich Gl. (1.1) zur Ermittlung der Lösung noch vereinfachen. Für sehr kleine Winkel  $\tilde{\varphi}$ , mit  $\tilde{\varphi} \ll 1$ , kann  $\sin \tilde{\varphi}$  durch den Winkel selbst ersetzt werden

$$\sin \tilde{\varphi} \approx \tilde{\varphi} .$$

---

<sup>1</sup> Das Symbol  $\tilde{\varphi}$  bei  $\tilde{\varphi}$  kennzeichnet den zeitlich veränderlichen Winkel, d. h.  $\tilde{\varphi} = \varphi(t)$ . Diese Bezeichnung wurde gewählt, damit nach Einführung eines Zeitansatzes, z. B.  $\tilde{\varphi} = \varphi \sin \omega t$ , für die Amplitude  $\varphi$  kein eigener Buchstabe oder zusätzlicher Index erforderlich ist. Für Zeitableitungen wird  $d\varphi(t)/dt = \dot{\tilde{\varphi}}$  geschrieben.

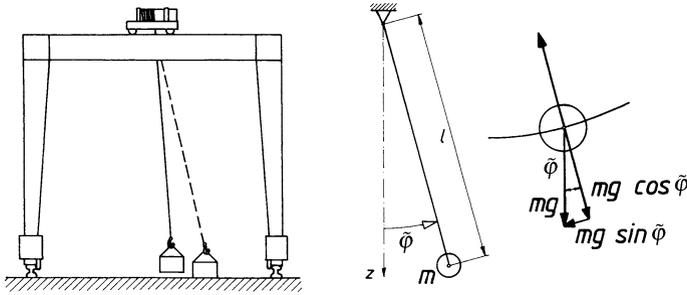


Abb. 1.1 Pendelschwingungen

Dann entsteht aus der *nichtlinearen* Differentialgleichung (1.1) die leichter zu lösende linearisierte Bewegungsgleichung

$$ml\ddot{\tilde{\varphi}} + mg\tilde{\varphi} = 0. \quad (1.2)$$

Sie wird als *homogene Bewegungsdifferentialgleichung* bezeichnet. Ihre Lösung wird in Abschn. 1.3 behandelt.

### Beispiel 2. Freie, gedämpfte Schwingungen einer Federwaage

Aus Abb. 1.2 ist der prinzipielle Aufbau einer Federwaage zu ersehen. Darin sind sofort die wesentlichen Elemente eines Schwingungssystems von einem Freiheitsgrad zu erkennen: Masse, Elastizität und Dämpfung. Jede Kaufmannswaage ist im Grunde so aufgebaut, auch wenn sie mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Anzeige komplizierter konstruiert ist. Die Dämpfung wird absichtlich in das System eingebracht, damit die Anzeige schnell zum Stehen kommt. Ist die Dämpfung zu gering, dann oszilliert die Schwingung zu lange um eine Mittellage; bei zu starker Dämpfung bewegt sich die Schwingung zu langsam in diese Endlage (statische Ruhelage).

Die Verschiebung, in der die Bewegungsgleichung formuliert wird, kann entweder vom unbelasteten Zustand (Verschiebung  $\tilde{u}$ ) oder von der statischen Ruhelage aus (Verschiebung  $\tilde{u}$ ) gezählt werden (Abb. 1.2).

In Abb. 1.3a sind alle auf die freigeschnittene Masse einwirkenden Kräfte eingetragen. Das Gewicht  $mg$  wirkt in Bewegungsrichtung, die Federkraft  $F_s$  und die Dämpfungskraft  $F_d$  wirken entgegengesetzt dazu. Setzt man die Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit an, dann liefert das Newton'sche Gesetz mit der Masse  $m$ , der Federsteifigkeit  $s$  und der Dämpfungskonstanten  $d$

$$m\ddot{\tilde{u}} = mg - d\dot{\tilde{u}} - s\tilde{u}$$

oder

$$m\ddot{\tilde{u}} + d\dot{\tilde{u}} + s\tilde{u} = mg. \quad (1.3)$$

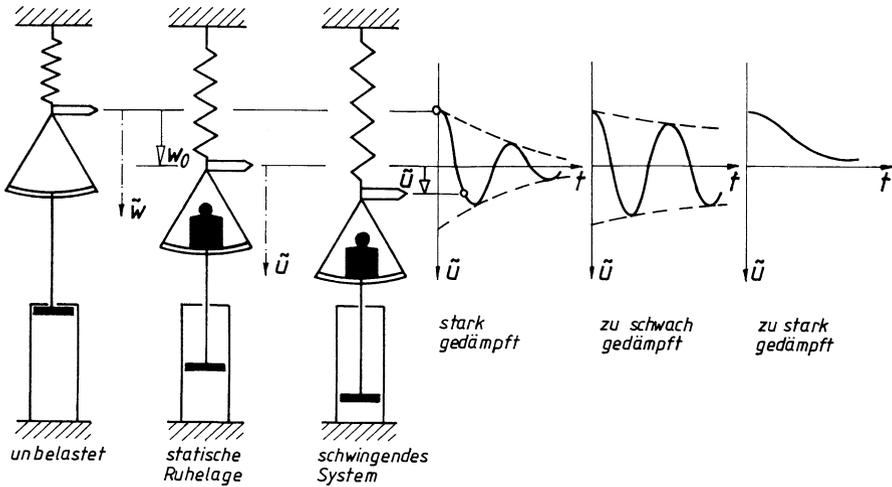


Abb. 1.2 Gedämpfte Schwingungen bei einer Federwaage

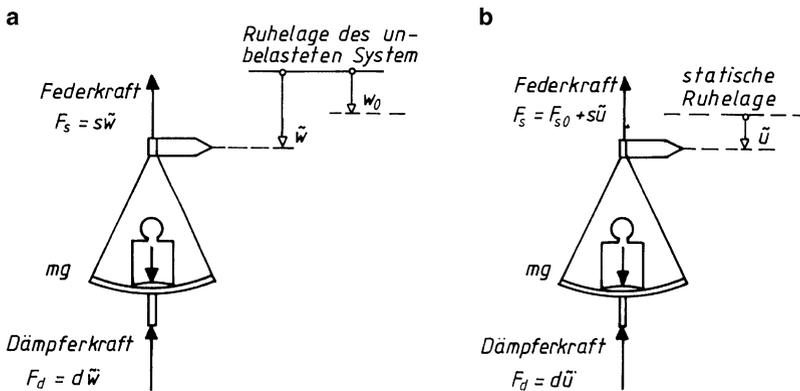


Abb. 1.3 Gewichtskraft, Feder- und Dämpferkraft; Koordinaten

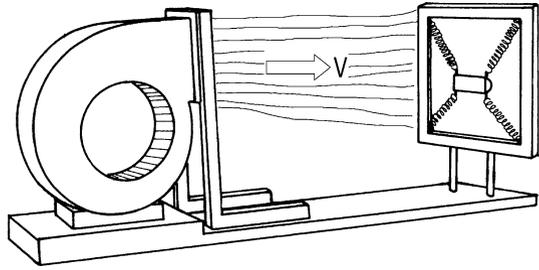
In der statischen Ruhelage ist wegen  $\dot{w}_0 = 0$ ,  $\ddot{w}_0 = 0$  das Gewicht mit der Federkraft  $F_{s0}$  im Gleichgewicht, die zugehörige Auslenkung  $w_0$  erhält man aus

$$sw_0 = mg.$$

Vielfach interessiert man sich nur für die Bewegung um die statische Ruhelage; die Verschiebung  $\tilde{u}$  wird hierbei von der statischen Ruhelage des Systems nach Aufbringen der Belastung aus gezählt (Abb. 1.3b). Mit einem dementsprechenden Ansatz

$$\tilde{w} = \tilde{u} + w_0, \quad \dot{\tilde{w}} = \dot{\tilde{u}}, \quad \ddot{\tilde{w}} = \ddot{\tilde{u}}$$

**Abb. 1.4** Laborversuch zur Galloping-Selbsterregung



erhält man aus (1.3) die Bewegungsgleichung in der neuen Form

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + s\tilde{u} + sw_0 = mg,$$

bzw.

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + s\tilde{u} = 0. \quad (1.4)$$

Die Federkraft spaltet sich hierbei auf in einen Teil  $F_{s0}$ , der dem Gewicht die Waage hält,  $F_{s0} = sw_0 = mg$ , und in einen Teil  $s\tilde{u}$ , der bei Abweichungen aus der statischen Ruhelage wirksam wird. Wird das Wägegut vorsichtig auf das unbelastete System aufgebracht, dann ist die Anfangsgeschwindigkeit Null

$$\dot{u}(t=0) = u_0 = 0,$$

während für die Anfangsverschiebung gilt

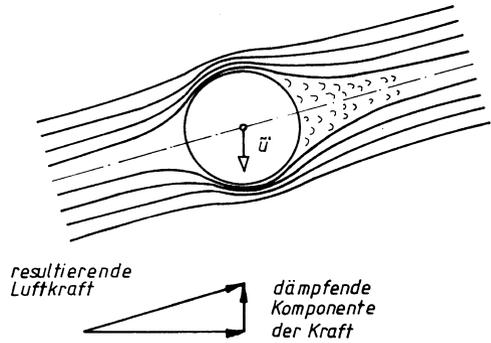
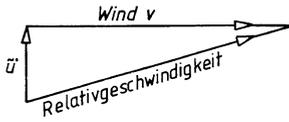
$$\tilde{u}(t=0) = -w_0 = -\frac{mg}{s}.$$

### Beispiel 3. Angefachte, instabile Schwingungen – Galloping von Freileitungen

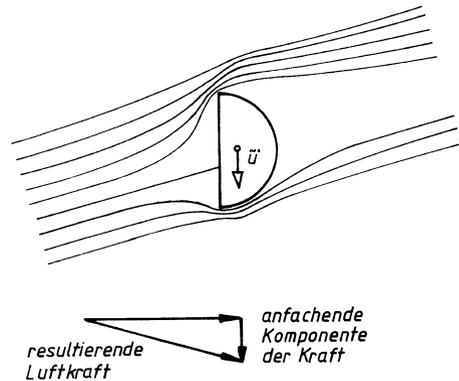
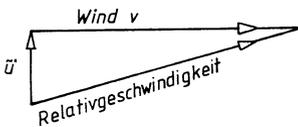
An vereisten Freileitungen hat man starke Vertikalschwingungen beobachtet, die offensichtlich dann auftraten, wenn der Wind eine gewisse Geschwindigkeit überschritt. Diese Erscheinung wurde zuerst von Den Hartog [1] erklärt, an dem sich auch die folgende Darstellung orientiert. Labormäßig kann man derartige Vertikalschwingungen mit dem in Abb. 1.4 dargestellten Modell nachahmen, wobei das unrunde Profil, welches beispielsweise durch einseitige Vereisung eines Freileitungsdrabtes entsteht, durch ein Halbkreisprofil ersetzt wurde. Bläst man den federnd aufgehängten Stab mit Halbkreisprofil hinreichend stark an, dann führt er, ganz wie die Freileitung, starke Vertikalschwingungen aus.

Zur Erklärung dieses Phänomens denken wir uns zuerst ein quer zum Wind schwingendes Kreisprofil in das Labormodell nach Abb. 1.4. Überlagert man die Windgeschwindigkeit  $v$  und die Geschwindigkeit der Querbewegung  $\dot{u}$  vektoriell, so ergibt sich die Relativgeschwindigkeit des Körpers gegenüber der umgebenden Luft. Die Strömung um das Kreisprofil ist symmetrisch zur Richtung der Relativgeschwindigkeit. Man erhält damit eine auf den Körper wirkende Kraft in Richtung

a



b



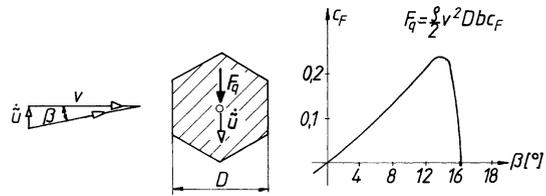
**Abb. 1.5** a Dämpfende Quertriebskraft entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung beim Kreisprofil; b anfachende Bewegungsrichtung beim Halbkreisprofil

der Relativgeschwindigkeit, was in Querrichtung einer Kraft entspricht, die der Bewegung entgegenwirkt, also dämpft (Abb. 1.5a).

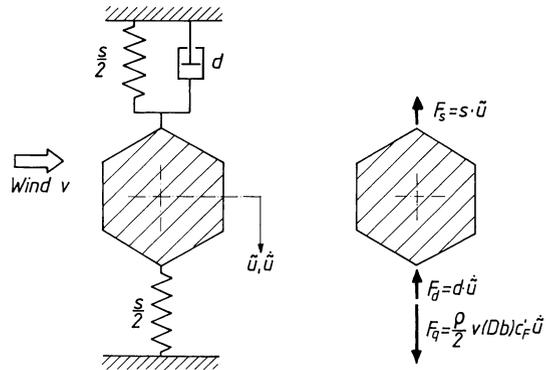
Das ist anders beim abwärtschwingenden Halbkreisprofil, da die Strömung an der Oberkante abreißt, während sie unten lange anliegt (Abb. 1.5b). In der Zone in der die Strömung abgerissen ist, herrscht annähernd der atmosphärische Druck, während auf der Unterseite, an der die Stromlinien anliegen, Unterdruck herrscht. Das ergibt sich aus dem Bernoullischen Gesetz der Strömungslehre, nach dem im Bereich höherer Geschwindigkeiten ein niedrigerer statischer Druck herrscht. Die Quertriebskomponente der auf den Körper wirkenden Kraft wirkt dadurch beim Halbkreisprofil in Bewegungsrichtung, vgl. Abb. 1.5b. Da Kraft und Bewegungsrichtung gleichgerichtet sind, führt die Quertriebskomponente dem System Energie zu und facht die Schwingung an. Die bisher nur qualitativen Überlegungen sollen nun quantifiziert werden. Abbildung 1.6 gibt den von Försching [2] vermessenen Quertriebsbeiwert für ein regelmäßiges Sechseck wieder, das sich im Prinzip wie das Halbkreisprofil verhält. Die Quertriebskraft  $F_q$  wird aus der Beziehung

$$F_q = \underbrace{\frac{\rho}{2} (v^2 + \dot{u}^2)}_{\text{Staudruck}} \underbrace{Db}_{\text{Stirnfläche}} c_F \quad (1.5)$$

**Abb. 1.6** Quertriebswert eines regelmäßigen Sechsecks nach [2]



**Abb. 1.7** Gleichgewicht an der schwingenden Masse



bestimmt, wobei die Länge  $b$  die Länge bzw. Breite,  $D$  die Dicke des Profils,  $\rho$  die Dichte der Luft und  $c_F$  der im Windkanal vermessenen Quertriebsbeiwert ist. Die entsprechende Kraft  $F_q$  wirkt auch hier in Bewegungsrichtung. Den zu einer Abwärtsbewegung mit der Geschwindigkeit  $\dot{u}$  gewonnenen Anströmwinkel erhält man aus

$$\tan \beta = \frac{\dot{u}}{v} . \tag{1.6}$$

Im Bereich kleiner Winkel ( $-12^\circ < \beta < +12^\circ$ ) lässt sich der Verlauf der  $c_F$ -Kurve recht gut durch eine Gerade mit der Steigung  $c_{F'}$  der Kurve im Nullpunkt approximieren

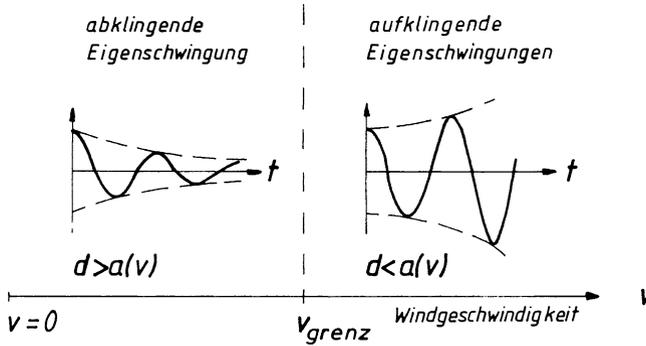
$$c_F = c_{F'} \beta . \tag{1.7}$$

Für einen kleinen Winkel gilt außerdem  $\beta \approx \tan \beta$  und es kann  $\dot{u}^2$  gegenüber  $v^2$  vernachlässigt werden. Damit ergibt sich aus (1.5) eine Anfachungskraft, die proportional zur Schwinggeschwindigkeit  $\dot{u}$  des Systems ist:

$$F_q = \frac{\rho}{2} v \dot{u} D b c_{F'} . \tag{1.8}$$

Gleichung (1.8) ist die bezüglich  $\dot{u}$  linearisierte Form von (1.5).

In Abb. 1.7 sind am freigeschnittenen Körper sämtliche angreifenden Kräfte eingetragen. Die auch im Vakuum schon vorhandene sehr geringe Dämpfung des Systems, aufgrund der Materialdämpfung in der Feder und aufgrund von Reibungseffekten an den Federanlenkstellen, soll in der Dämpfungskraft  $F_d$  berücksichtigt



**Abb. 1.8** Doppelcharakter des Galloping-Schwingers: abklingen Eigenschwingung bei  $v < v_{\text{grenz}}$  und aufklingende bei  $v > v_{\text{grenz}}$

werden. Bildet man nun Gleichgewicht mit Hilfe des Newton'schen Gesetzes, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + s\tilde{u} = F_q,$$

bzw.

$$m\ddot{u} + [d - a(v)]\dot{u} + s\tilde{u} = 0, \quad (1.9)$$

wobei mit dem Anfachungskoeffizienten  $a(v)$  der von der Windgeschwindigkeit abhängende und aus der Anfachungskraft herausgezogene Ausdruck

$$a(v) = \frac{\rho}{2} v D b c_F' \quad (1.10)$$

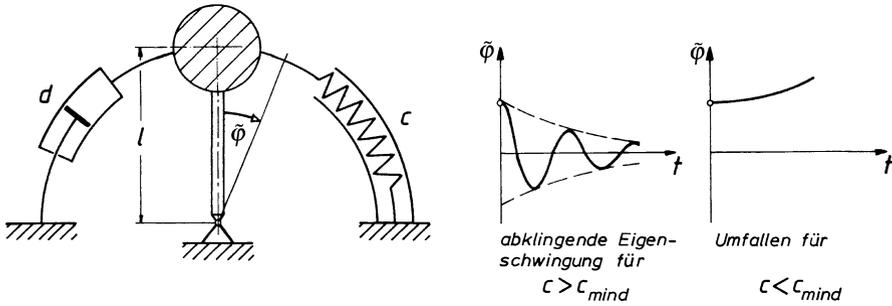
abgekürzt wird.

Schon ohne Rechnung ahnt man, was passiert. Bei niedriger Windgeschwindigkeit ( $a < d$ ) überwiegt der dämpfende Anteil; Eigenschwingungen, die auf irgendeine Weise plötzlich angeregt werden, klingen ab, weil der Wert in der eckigen Klammer von (1.9) positiv ist. Ab einer gewissen Windgeschwindigkeit wird der Klammerausdruck jedoch negativ ( $a > d$ ), das System wird entdämpft; die aufklingende Galloping-Schwingung setzt ein (Abb. 1.8).

Für ein rein lineares System würde die Schwingung bis zu unendlich großen Ausschlägen aufklingen. Praktisch treten aber immer irgendwelche Nichtlinearitäten auf, die die Ausschläge begrenzen, z. B. durch das Zu-Block-Gehen der Federn im Labormodell von Abb. 1.4. Gewöhnlich werden die Ausschläge bei einem derartigen instabilen System aber zu groß, so dass es technisch nicht brauchbar ist.

#### *Beispiele 4 und 5. Monotones Auswandern – statische Instabilität – Divergenz*

Ein auf dem Kopf stehendes Pendel, das nicht durch eine Feder abgestützt ist, fällt um. Das ist ein monotones Auswandern, das unterbunden wird, wenn die Feder



**Abb. 1.9** Monoton instabiles System bei fehlender Mindeststeifigkeit (Umfallen durch Eigengewicht)

eine Mindeststeifigkeit aufweist (Abb. 1.9). Auch ein Dämpfer mit beliebig großer Dämpfungskonstante  $d$  kann nichts daran ändern, dass das System nur für  $c \geq c_{\text{mind}}$  schwingungsfähig ist.

Die Bewegungsgleichung entsteht, wenn man das Newton'sche Gesetz in gleicher Weise wie bei Beispiel 1 formuliert,

$$ml\ddot{\tilde{\varphi}} = \underbrace{-c\tilde{\varphi}}_{\text{elastische Rückstellkraft}} - dl\dot{\tilde{\varphi}} + \underbrace{mg \sin \tilde{\varphi}}_{\text{destabilisierende Kraft}} .$$

Für kleine Schwingungen erhält man die linearisierte Beziehung

$$ml\ddot{\tilde{\varphi}} + dl\dot{\tilde{\varphi}} + (cl - mg)\tilde{\varphi} = 0 . \tag{1.11}$$

Um das monoton-instabile Verhalten (Umfallen) zu verhindern, ist eine Mindeststeifigkeit

$$c_{\text{mind}} = \frac{mg}{l} \tag{1.12}$$

erforderlich, wie die Lösung im Abschn. 1.3 zeigen wird.

Nicht immer ist es so offensichtlich wie beim umgekehrten Pendel, dass eine Mindeststeifigkeit erforderlich ist. Als 5. Beispiel wird ein Flugzeugflügel betrachtet, bei dem eine sogenannte *Torsionsdivergenz* auftreten kann, wenn die Torsionssteifigkeit des Flügels zu gering ist. Während die elastische Achse eines Flügels etwa in der Mitte liegt, greifen die beiden Resultierenden der Luftkräfte, die Auftriebskraft  $A$  und der Luftwiderstand  $W$  etwa im vorderen Viertelpunkt an (Abb. 1.10).

Durch die Luftkräfte entsteht im Flügel ein Torsionsmoment, das den ursprünglichen Anstellwinkel  $\alpha_0$ , um den Winkel  $\varphi$  vergrößern möchte,  $\alpha = \alpha_0 + \varphi$ . Wird der geringe Beitrag des Luftwiderstandes  $W$  vernachlässigt, so erhält man für das Luftkrafttorsionsmoment

$$M_{\text{Luft}} = A \frac{l}{4} \cos(\alpha_0 + \varphi) = \frac{\rho}{2} v^2 b l c_A \frac{l}{4} \cos(\alpha_0 + \varphi) , \tag{1.13}$$

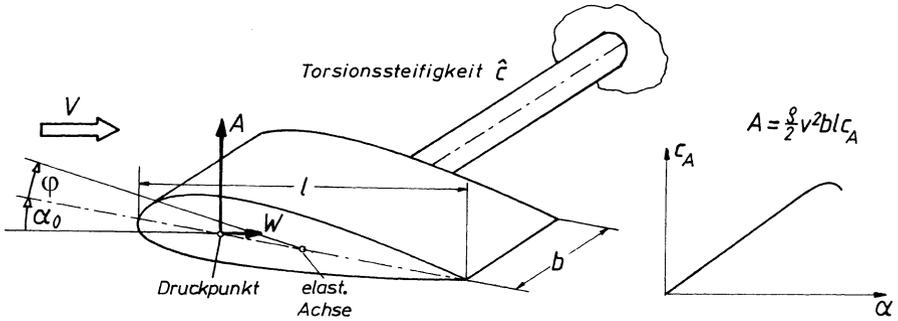


Abb. 1.10 Torsionsdivergenz durch Luftkräfte am Flügel, Auftriebsbeiwert  $c_A(\alpha)$

wobei  $c_A(\alpha)$  der vom Anstellwinkel  $\alpha$  abhängige Auftriebsbeiwert des Flügelprofils und  $\frac{l}{4}$  der Hebelarm zur elastischen Achse ist. Bei den üblichen kleinen Anstellwinkeln ist  $c_A$  linear von  $\alpha$  abhängig

$$c_A = c_A' \alpha = c_A'(\alpha_0 + \varphi). \quad (1.14)$$

Das Rückstellmoment (Torsionsmoment)  $c\varphi$  muss dem Luftkraftmoment die Waage halten. Daraus folgt unter Verwendung der Gln. (1.13) und (1.14), wobei man  $\cos(\alpha_0 + \varphi)$  noch durch 1 ersetzen kann

$$c\varphi = \frac{\rho}{8} v^2 b l^2 c_A'(\alpha_0 + \varphi). \quad (1.15)$$

Aus dieser Gleichung kann man den Aufdrehwinkel  $\varphi$  ermitteln

$$\varphi = \frac{\alpha_0}{\frac{8c}{\rho v^2 b l^2 c_A'} - 1}. \quad (1.16)$$

An diesem Ausdruck wird deutlich, dass das Torsionsschwingungssystem bereits statisch instabil werden kann, wenn die Torsionssteifigkeit  $c$  zu klein ist, oder wenn die Geschwindigkeit  $v$  zu groß wird. Oberhalb der Geschwindigkeitsgrenze

$$v^2 > 8c / (b l^2 \rho c_A') \quad (1.17)$$

wird der Flügel wegtordieren.

Praktisch ebenso wichtig ist die Neigung des Flügels zum Biege – Torsions – Flattern, einer oszillatorischen Instabilität, die zu ihrer Beschreibung aber wenigstens ein Zwei – Freiheitsgradsystem benötigt.

## 1.2.2 Beispiele für erzwungene Schwingungen

Bei allen bisher betrachteten Beispielen wurden die Schwingungen durch Anfangsbedingungen, bei denen es sich auch um zufällige Störungen handeln kann, verur-

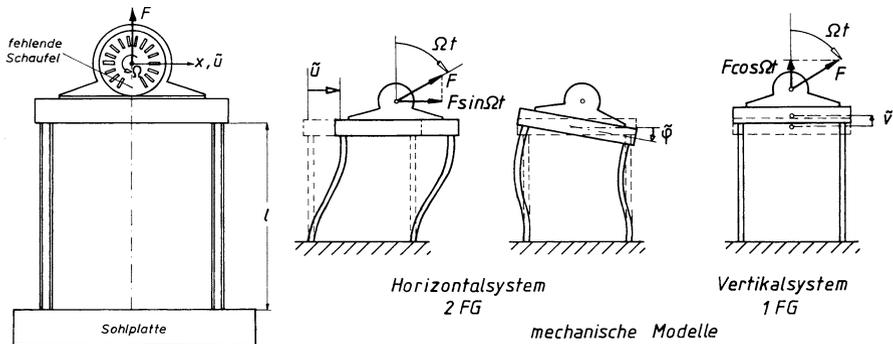


Abb. 1.11 Turbinenfundament unter Unwuchterregung, Aufspaltung in zwei Systeme

sacht. Äußere Kräfte wirken nicht auf das Schwingungssystem ein. Das ist anders bei den nun zu betrachtenden erzwungenen Schwingungen. Hier treten äußere, zeitabhängige Kräfte auf.

#### Beispiel 6. Turbine auf Tischfundament – krafterregtes System

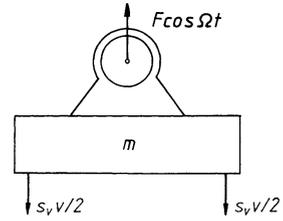
Die auf dem Fundamenttisch aufgestellte Turbine (Abb. 1.11) besitzt durch einen Schaufelbruch eine Unwucht. In der der Schaufellücke entgegengesetzten Richtung wirkt eine überschüssige Fliehkraft

$$F = r \Delta m \Omega^2 \quad (1.18)$$

als umlaufende *Erregerkraft*, die den Tisch zu horizontalen und vertikalen Schwingungen anregt.  $\Delta m$  ist hierbei die Masse der fehlenden Schaufel,  $r$  ist der durch die Unwucht entstandene Abstand des Massenschwerpunkts von der Rotationsachse; die Umlaufwinkelgeschwindigkeit ist  $\Omega$ .

Tischplatte, Turbinenrotor und Gehäuse werden zusammengenommen als starrer Körper der Masse  $m$  betrachtet, welcher für die Bewegung in der  $x$ - $y$ -Ebene drei Freiheitsgrade besitzt. Da die Konstruktion symmetrisch zur Ebene  $x = 0$  ist, lässt sich das Schwingungssystem in zwei voneinander entkoppelte Teilsysteme zerlegen. Die reinen Vertikalschwingungen lassen sich durch ein Ein-Freiheitsgradsystem erfassen, während die Horizontal- und Drehschwingungen miteinander gekoppelt sind und nur durch ein System von zwei Freiheitsgraden wiedergegeben werden können (Abb. 1.11). Die Zeitzählung für die umlaufende Fliehkraft  $F$  wurde willkürlich im Augenblick der Vertikallage der Schaufellücke begonnen. Deshalb pulsiert die schwingungserregende Kraft des Horizontalsystems mit  $\sin \Omega t$  und die schwingungserregende Kraft des Vertikalsystems mit  $\cos \Omega t$ . Für  $t = 0$  wirkt die Fliehkraft  $F$  voll in  $y$ -Richtung, während sie in der Horizontalrichtung noch Null ist (Abb. 1.11). Die Bewegungsgleichung für das Vertikalsystem erhält man, wenn man

**Abb. 1.12** Gleichgewicht an der schwingenden Masse



die Masse freischneidet (Abb. 1.12), und das Newton'sche Gesetz anwendet:

$$m\ddot{v} = -s_v \tilde{v} + F \cos \Omega t$$

oder

$$m\ddot{v} + s_v \tilde{v} = F \cos \Omega t . \quad (1.19)$$

Die Vertikalverschiebung  $\tilde{v}(t)$  wird hierbei von der statischen Ruhelage aus gezählt, die Zusammenrückung der Stützen durch das Eigengewicht ist dann ohne Belang. Als Rückstellfedern wirken die vier Stützen, die bei der Vertikalschwingung ausschließlich auf Dehnung beansprucht werden. Die Dehnsteifigkeit ist für das Ersatzsystem einer Stütze  $c_D = EA/l$ , wobei  $E$  der Elastizitätsmodul und  $A$  die Querschnittsfläche der Stütze ist. Im Steifigkeitswert  $s_v$  sind die vier Stützensteifigkeiten zusammengefasst

$$s_v = 4c_D = \frac{4EA}{l} \quad (1.20)$$

### Beispiel 7. Seismischer Schwingungsaufnehmer – fußpunkterregtes System

Seismische Aufnehmer werden benutzt, um Bodenerschütterungen, z. B. als Folge von Erdbeben oder Steinbruchsprengungen, zu registrieren. Auch die Schwingungen von Maschinengehäusen lassen sich mit ihnen aufzeichnen. Sie bestehen aus einer weich aufgehängten Masse, die aufgrund ihrer Trägheit praktisch in Ruhe bleibt, wenn sich das Aufnehmergehäuse bewegt (Abb. 1.13). Die Schreibtrommel zeichnet die Relativbewegung zwischen der Masse  $m$  und dem Gehäuse auf. Die Gehäusebewegung wird als Fußpunkterregung  $\tilde{u}_F$  vorgegeben. Es gilt

$$\tilde{u}_{\text{rel}} = \tilde{u} - \tilde{u}_F .$$

Für die Ableitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Newton'schen Gesetzes wird die Verschiebung  $\tilde{u}$  wieder auf die statische Ruhelage bezogen. Es ist zu beachten, dass die Beschleunigung im Inertialsystem anzugeben sind. Man erhält (Abb. 1.14)

$$m\ddot{u} = -d(\dot{u} - \dot{u}_F) - s(\tilde{u} - \tilde{u}_F)$$

oder

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + s\tilde{u} = d\dot{u}_F + s\tilde{u}_F . \quad (1.21)$$

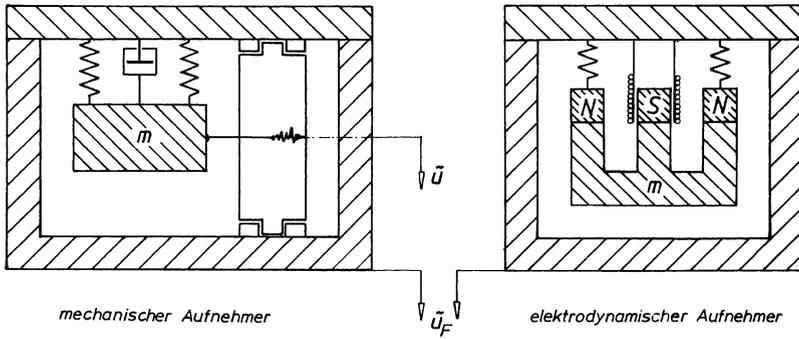
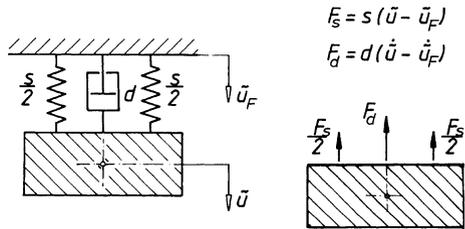


Abb. 1.13 Seismischer Aufnehmer – Fußpunkterregtes System

Abb. 1.14 Kräfte an der Masse des seismischen Aufnehmers



Führt man anstelle von  $\tilde{u}$  die auf der Schreibtrommel angezeigte Relativverschiebung  $\tilde{u}_{rel} = \tilde{u} - \tilde{u}_F$  als Freiheitsgrad ein, dann lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\tilde{u}}_{rel} + d\dot{\tilde{u}}_{rel} + s\tilde{u}_{rel} = -m\ddot{\tilde{u}}_F . \tag{1.22}$$

In dieser Formulierung ist die auf der rechten Seite stehende Erregungskraft proportional zur Fußpunktbeschleunigung. Ohne Rechnung erkennt man schon, dass für den Fall, in dem die Masse nahezu schwebt, d. h. bei sehr niedriger Steifigkeit und Dämpfung ( $s \cong 0, d \cong 0$ ), die Relativbeschleunigung gleich der negativen Fußpunktbeschleunigung ist:  $\ddot{\tilde{u}}_{rel} = -\ddot{\tilde{u}}_F$ .

Heute werden seismische Aufnehmer meistens als elektrodynamisches System gebaut, bei dem die schwingende Magnetmasse in der am Gehäuse befestigten Spule eine elektrische Spannung induziert. Diese Spannung ist der Relativgeschwindigkeit  $\dot{\tilde{u}}_F$  proportional (Abb. 1.13).

*Beispiel 8. Einachsanhänger auf welliger Fahrbahn – fußpunkterregtes System*

Geht man bei dem in Abb. 1.15 dargestellten Einachs-Anhänger davon aus, dass das ziehende Fahrzeug sehr gut gefedert ist, sodass die Anhängerkupplung in vertikaler Richtung praktisch in Ruhe ist, dann wird die Hubschwingungsanregung nur über

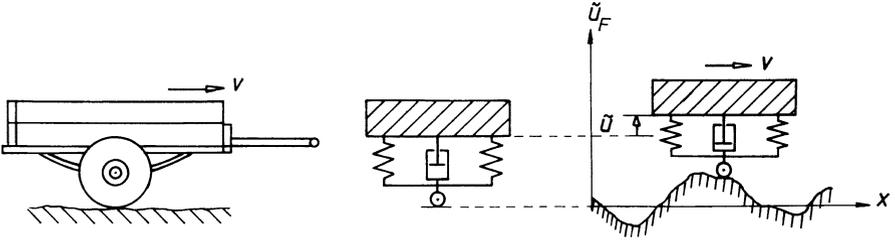
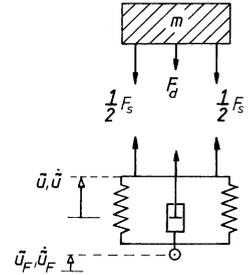


Abb. 1.15 Anhänger auf unebener Straße – Fußpunkterregung

Abb. 1.16 Kräfte am Wagenkörper



die Räder in den Anhänger eingeleitet. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass am rechten und am linken Rad die gleiche Straßenwelligkeit vorliegt.

Das Fahrzeug idealisieren wir als Einmasse-System, das über Federn und Dämpfer auf einer starren Rolle abgestützt ist, die der unebenen Fahrbahnoberfläche folgt. Durch die Einführung der starren Rolle wurden Federung und Dämpfung, die der reale Reifen natürlich besitzt, herausidealisiert. Die ortsabhängige Fahrbahnunebenheit wird durch die Fußpunkterregung  $u_F(x)$  beschrieben. Aus der Sicht eines mit konstanter Fahrzeuggeschwindigkeit mitbewegten Beobachters stellt sich die ortsabhängige Fahrbahnunebenheit wegen  $x = vt$  als zeitabhängig dar,  $u_F(x) = u_F(vt) = \tilde{u}_F$ . Zählt man die Schwingungsbewegungen von der statischen Ruhelage aus (Abb. 1.16), dann erhält man die zum seismischen Schwingungsaufnehmer analogen Bewegungsgleichungen (1.21):

$$m\ddot{\tilde{u}} + d\dot{\tilde{u}} + s\tilde{u} = d\dot{\tilde{u}}_F + s\tilde{u}_F . \tag{1.23}$$

Die Straßenwelligkeit übt die auf der rechten Seite stehende Erregerkraft

$$P = d\dot{\tilde{u}}_F + s\tilde{u}_F \tag{1.24}$$

auf den Fahrzeugkörper aus. Bei ebener Straße  $\tilde{u}_F = \dot{\tilde{u}}_F = 0$  verschwindet diese Anregung. Wird der Anhänger über einen Bordstein hochgezogen, dann hat  $\tilde{u}_F$  einen sprunghaftigen Verlauf (Abb. 1.17a), bei einer normalen Straße ist die Welligkeit mehr oder minder regellos (Abb. 1.17b). Alle betrachteten Fälle von Ein-Freiheitsgradschwingern, gleichgültig ob Fahrzeuganhänger, Turbinenfundament, Messgerät oder Galloping-Schwinger, genügen einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung (Tab. 1.1). Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit der Lösungsviel-

**Tab. 1.1** Zusammenstellung von Ein-Freiheitsgradschwingern

Beispiel	Bezeichnung	Gl.	Bezeichnung des Masse Freiheitsgrades	$m^*$	Dämpfung	Steifigkeit	Erregerkraft	Schwingungstyp
					$d^*$	$s^*$	$\vec{F}_e$	
1	Pendel	1.2	Winkel $\tilde{\varphi}$	$ml$	0	$mg$	0	ungedämpft gedämpft stabil
2	Federwaage	1.3	Verschiebung $\tilde{u}$	$m$	$d$	$s$	0	frei gedämpft stabil
3	Galloping-Schwinger	1.9	Verschiebung $\tilde{u}$	$m$	$d - a(v)$	$s$	0	frei gedämpft oder angefächert
4	umgekehrtes Pendel	1.11	Winkel $\tilde{\varphi}$	$ml$	$dl$	$cl - mg$	0	frei gedämpft oder monoton auswandernd instabil
5	Flugzeugflügel (Torsion)	1.15	Winkel $\tilde{\varphi}$	nicht angegeben		$\dot{c} - \frac{1}{8}\rho v^2 b l^2 c_A$	0	frei monoton auswandernd instabil
6	Turbinenfundament vertikal	1.19	Verschiebung $\tilde{v}$	$m_{\text{Tisch}} + m_{\text{Turbine}}$	0	$s = 4c_D$	$F \sin \Omega t$	frei harmonisch erzwungen ungedämpft
7	Seismischer Aufnehmer	1.21	Verschiebung $\tilde{u}$	$m$	$d$	$s$	$d\ddot{u}_F + s\dot{u}_F$	stabil gedämpft allgemein erzwungen
		1.22	Relativverschiebung $\tilde{u}_{\text{rel}}$	$m$	$d$	$s$	$m\ddot{u}_F$	erzwungen
8	Einachsanhänger	1.24	Verschiebung $\tilde{u}$	$m$	$d$	$s$	$d\ddot{u}_F + s\dot{u}_F$	stabil gedämpft allgemein sprungartig erzwungen frei
Allgemeiner Fall				$m^* \tilde{u} + d^* \dot{\tilde{u}} + s^* \tilde{u} = 0$ bzw. $\vec{F}_e$				frei erzwungen

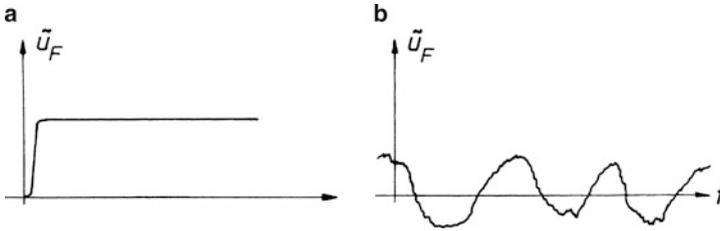


Abb. 1.17 Verlauf der Fußpunkterregung. **a** Bordsteinkante; **b** regelloser Verlauf auf der Straße

falt bei freien Schwingungen, d. h. mit *homogenen Differentialgleichungen* auseinandersetzen. Wie die erzwungene Schwingung, d. h. wie die *inhomogene Differentialgleichung* zu behandeln ist, wird in Abschn. 1.4 und 1.5 gezeigt.

### 1.3 Freie Schwingungen – Eigenverhalten

Mechanische Systeme führen Freie Schwingungen aus, wenn sie von Anfangsbedingungen angeregt, sich selbst überlassen ausschlagen. Die grundsätzlichen Verhaltensmöglichkeiten eines linearen Schwingungssystems aufgrund von Anfangsbedingungen, es mag noch so kompliziert aufgebaut sein und noch so viele Freiheitsgrade besitzen, lassen sich alle bereits am Ein- Freiheitsgradsystem erläutern. Für die homogene Bewegungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + s\tilde{u} = 0 \quad (1.25)$$

können zwei Anfangsbedingungen vorgegeben werden, nämlich

$$\tilde{u}(t = 0) = u_0 \quad \text{und} \quad \dot{\tilde{u}}(t = 0) = \dot{u}_0 .$$

Das System bleibt in Ruhe, wenn nicht wenigstens eine der beiden Anfangsbedingungen von Null verschieden ist. Um die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung (1.25) zu finden, führt man den Ansatz

$$\tilde{u} = Ae^{\lambda t} \quad (1.26)$$

ein. Das führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 m + \lambda d + s = 0 . \quad (1.27)$$

Die beiden Wurzeln (Eigenwerte) dieser quadratischen Gleichung lassen sich in der Form

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{m} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4ms}{d^2}} \right] , \quad (1.28a)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{m} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4ms}{d^2}} \right] \quad (1.28b)$$

angeben. Im Fall positiver Steifigkeit (Rückführung in die Ruhelage) führt man üblicherweise  $\omega_0$  als Abkürzung für die *Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems*

$$\omega_0 = \sqrt{s/m} \quad (1.29)$$

und  $D$  als *Dämpfungsgrad* (Lehr'sches Dämpfungsmaß)

$$D = \frac{d}{2\omega_0 m} = \frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{sm}} \quad (1.30)$$

ein. Mit  $i = \sqrt{-1}$  kann man die Wurzeln in der Form

$$\lambda_1 = \omega_0 \left[ -D + i\sqrt{1 - D^2} \right], \quad (1.31a)$$

$$\lambda_2 = \omega_0 \left[ -D - i\sqrt{1 - D^2} \right] \quad (1.31b)$$

schreiben. Die beiden Wurzeln treten entweder paarweise konjugiert komplex auf, wofür man mit  $\alpha$  als Realteil und  $\omega$  als Imaginärteil auch

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega, \quad (1.32a)$$

$$\lambda_2 = \alpha - i\omega \quad (1.32b)$$

schreiben kann. Durch eine einfache Umformung stellt man fest, wie der Zusammenhang zwischen der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  des gedämpften Systems und der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Systems lautet:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \alpha^2. \quad (1.33)$$

Die beiden Wurzeln können aber auch rein reell, d. h.

$$\lambda_1 = \alpha_1, \quad \lambda_2 = \alpha_2$$

oder rein imaginär

$$\lambda_1 = +i\omega, \quad \lambda_2 = -i\omega$$

sein. Da die charakteristische Gleichung zwei Lösungen besitzt, war der eingliedrige Lösungsansatz (1.26) etwas zu kurz gegriffen. In den Fällen in denen zwei verschiedene Wurzeln vorliegen, lautet der zweigliedrige Lösungsansatz

$$\tilde{u} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (1.34)$$

Im Falle einer Doppelwurzel ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ) ist neben  $e^{\lambda_1 t}$  auch noch  $t e^{\lambda_2 t}$  eine Lösung. Der zweigliedrige Lösungsansatz lautet in diesem Fall

$$\tilde{u} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 t e^{\lambda_2 t} . \quad (1.35)$$

Der entscheidende Parameter aufgrund dessen entschieden werden kann ob eine konjugiert komplexe, eine rein reelle oder rein imaginäre Lösung vorliegt, ist der Dämpfungsgrad  $D$ , welcher – falls er negativ wird – auch zum Anfachungsgrund werden kann. In Tab. 1.2 ist als Übersicht zusammengestellt, welche Art von Wurzeln (Eigenwerte) man bei unterschiedlichem Dämpfungsgrad erhält und wie die Schwingungsverläufe aussehen, die nun in den nächsten Abschnitten diskutiert werden sollen.

Tabelle 1.3 liefert eine Übersicht aller gängiger Dämpfungsgrößen für das Ein-Freiheitsgradsystem.

### 1.3.1 Das ungedämpfte System, $D = 0$

Wir wollen zunächst den Fall des völlig ungedämpften Systems ( $D = 0$ ) betrachten, der sich bei der Idealisierung des Pendels (Beispiel 1) ergab. Der Lösungsansatz ergibt sich aus (1.34) zu

$$\tilde{u} = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} , \quad (1.36)$$

der mit Hilfe der Euler'schen Formel

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm i \sin \omega_0 t \quad (1.37)$$

in

$$\tilde{u} = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t \quad (1.38)$$

umgeschrieben werden kann. Formal entsteht dabei  $B_1 = A_1 + A_2$  und die Beziehung  $B_2 = i(A_1 - A_2)$ , was aber ohne Belang ist, da die zunächst freien Konstanten  $A_1, A_2$  bzw.  $B_1, B_2$  ohnehin erst durch die Anfangsbedingungen  $\tilde{u}(0) = u_0$  und  $\dot{\tilde{u}}(0) = \dot{u}_0$  festgelegt werden. Durch die Ableitung von (1.38) nach der Zeit erhält man die Geschwindigkeit

$$\dot{\tilde{u}}(t) = -\omega_0 B_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 B_2 \cos \omega_0 t . \quad (1.39)$$

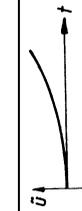
Setzt man die Anfangsbedingungen für  $t = 0$  in (1.38) bzw. (1.39) ein, so erhält man für die Konstanten

$$B_1 = u_0 , \quad B_2 = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} .$$

Man erhält somit als Lösung

$$\tilde{u} = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t . \quad (1.40)$$

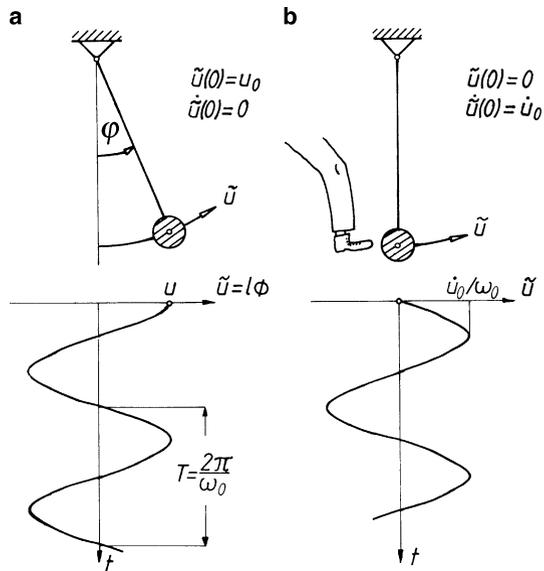
**Tab. 1.2** Eigenwerte und Zeitverlauf bei verschiedenem Dämpfungsgrad

Dämpfungsgrad	Eigenwerte		Bewegung	Zeitverlauf für $u_0 = 0, \dot{u}_0 = 0$	Stabilität
	Realteil $\alpha$	Imaginärteil $i\omega$			
$D > 1$	$\alpha_1, \alpha_2$ negativ		monotones Abklingen (Kriechen)		stabil
$D = 1$	$\alpha_1 = \alpha_2$ negativ	0	monotones Abklingen (Kriechen)		stabil
$0 < D < 1$	$\alpha$ negativ	$\pm i\omega$ vorhanden	gedämpfte Schwingung		stabil
$D = 0$	0	$\pm i\omega_0$ vorhanden	ungedämpfte Schwingung		grenzstabil
$-1 < D < 0$	$\alpha$ positiv	$\pm i\omega$ vorhanden	angefachte Schwingung		oszillatorisch instabil
$D = -1$	$\alpha_1 = \alpha_2$ positiv	0	monotones Aufklingen		monoton instabil (Divergenz)
$D < -1$	$\alpha_1, \alpha_2$ positiv	0	monotones Aufklingen		monoton instabil (Divergenz)

Tab. 1.3 Tabelle gilt nur für lineare Schwinger vom Typ  $m\ddot{u} + d\dot{u} + su = \dots$

	$d$	$D$	$\delta$	$\Lambda$	$\eta$	$Q$	$\psi$
Dämpfungskoeffizient $d$ [N s/m] „damping coefficient“ dB	1	$d = 2D\sqrt{sm}$ $d = 2Dm\omega_0$	$d = 2\delta m$	$d = \frac{2m\omega_0(\Lambda/2\pi)}{\sqrt{1+(\Lambda/2\pi)^2}}$	$d = \frac{m\omega_0}{\Omega}$	$d = \frac{m\omega_0}{Q}$	$d = \frac{\psi/s}{2\pi\Omega}$
Dämpfungsgrad $D$ [1] „damping ratio“ $\xi$ „lossfactor“ $\eta = 2\xi = 2D$	$D = \frac{d}{2\sqrt{sm}}$ $D = \frac{d}{2m\omega_0}$	1	$D = \frac{\delta}{\omega_0}$	$D = \frac{(\Lambda/2\pi)}{\sqrt{1+(\Lambda/2\pi)^2}}$	$D = \frac{m\omega_0}{2\xi}$	$D = \frac{1}{2Q}$	$D = \frac{\psi/\omega_0}{4\pi\xi}$
Abklingfaktor $\delta$ [1/s]	$\delta = \frac{d}{2m}$	$\delta = D\omega_0$	1	$\delta = \frac{(\Lambda/2\pi)m\omega_0}{\sqrt{1+(\Lambda/2\pi)^2}}$ $\delta = \frac{\Lambda\omega}{2\pi}$	$\delta = \frac{m\omega_0^2}{2\xi}$ $\delta = \frac{m\delta}{2\xi m}$	$\delta = \frac{\omega_0}{2D}$	$\delta = \frac{\psi\omega_0^2}{4\pi\xi}$
Logarithmisches Dekrement $\Lambda$ [1] „log. decrement“ $\delta$	$\Lambda = \frac{\pi d}{\sqrt{m^2\omega_0^2 - d^2}}$ $\Lambda = \frac{\pi d}{m\omega_0}$	$\Lambda = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$	$\Lambda = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$	1	$\Lambda = \frac{2\pi\eta\omega_0}{\sqrt{4\xi^2 - \eta^2\omega_0^2}}$	$\Lambda = 2\pi \frac{(\frac{1}{2Q})}{\sqrt{1-(\frac{1}{2Q})^2}}$	$\Lambda = \frac{2\pi\psi\omega_0}{\sqrt{(4\pi\xi\Omega)^2 - \psi^2\omega_0^2}}$
Verlustfaktor $\eta$ [1] Formel gilt nur für viskose Dämpfung (Kelvin-Voigt) „lossfactor“ s. o.	$\eta = \frac{d\Omega}{s}$	$\eta = \frac{2D\Omega}{\omega_0}$	$\eta = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0}$ $\eta = \frac{2\delta\Omega m}{s}$	$\eta = \frac{2\Omega(\Lambda/2\pi)}{\omega_0\sqrt{1+(\Lambda/2\pi)^2}}$	1	$\eta = \frac{\Omega}{Q\omega_0}$	$\eta = \frac{\psi}{2\pi}$
Güte $Q$ [1] „Q-factor“	$Q = \frac{m\omega_0}{d}$	$Q = \frac{1}{2D}$	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$	$Q = \frac{\sqrt{1+(\Lambda/2\pi)^2}}{2(\Lambda/2\pi)}$	$Q = \frac{\Omega}{\eta\omega_0}$	1	$Q = \frac{2\pi\xi\Omega}{\psi\omega_0}$
Dämpfungsfaktor $\psi = W_D/W_{pot}$	$\psi = \frac{2\pi\xi d}{s}$	$\psi = 4\pi \frac{\Omega}{\omega_0} D$	$\psi = \frac{4\pi\Omega\delta}{\omega_0^2}$	$\psi = 4 \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{(\Lambda/2\pi)}{\sqrt{1+(\Lambda/2\pi)^2}}$	$\psi = 2\pi\eta$	$\psi = \frac{2\pi\xi\Omega}{Q\omega_0}$	1

**Abb. 1.18** Freie Pendel-  
schwingung. **a** bei Anfangs-  
auslenkung  $u_0$ ; **b** bei An-  
fangsgeschwindigkeit  $\dot{u}_0$



Dieses Ergebnis ist leicht zu interpretieren. Ist wie bei der pendelnden Last am Kranhaken die Anfangsgeschwindigkeit Null, so stellt sich eine reine Cosinusschwingung mit der *Amplitude*  $u_0$  ein, die durch die Anfangsbedingung vorgegeben ist (Abb. 1.18a). Die Schwingung klingt nicht ab, weil eine Dämpfung nicht berücksichtigt wurde. Die *Periodendauer* des rein harmonischen Vorganges beträgt

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/\sqrt{s/m} . \quad (1.41)$$

Wird der in der Anfangslage unausgelenkt am Kranhaken hängenden Last  $\tilde{u}(0) = u_0 = 0$ , zum Beispiel durch einen Fußtritt, eine Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\tilde{u}}(0) = \dot{u}_0$  erteilt, so stellt sich eine reine Sinusschwingung mit der Amplitude  $\dot{u}_0/\omega_0$  ein, der Cosinusanteil entfällt (Abb. 1.18b). Treten Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit gleichzeitig auf, dann müssen die Sinus- und die Cosinusschwingung superponiert werden. Sinus- und Cosinusanteile gleicher Frequenz lassen sich stets als ein einziger harmonischer Vorgang erfassen, bei dem dann allerdings ein Nullphasenwinkel auftritt. Anstelle von (1.40) erhält man dann als Lösung

$$\tilde{u} = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.42)$$

mit der Amplitude

$$C = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right)^2}$$

und dem *Phasenwinkel*

$$\varphi = \arctan \left[ -\frac{\dot{u}_0}{\omega_0 u_0} \right] .$$

### 1.3.2 Das gedämpft schwingende System, $0 < D < 1$

Tritt zusätzlich zur Masse und Steifigkeit auch noch Dämpfung auf, was bei einer ganzen Reihe von Schwingern im Abschn. 1.2 der Fall war (Zusammenstellung in Tab. 1.1), dann werden die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung konjugiert komplex, falls der Dämpfungsgrad  $D$  einen Wert zwischen 0 und 1 annimmt. Dieser Fall soll im Folgenden betrachtet werden.

Die auftretenden freien, gedämpften Schwingungen werden wie beim ungedämpften System (1.38) aus zwei Anteilen zusammengesetzt

$$\tilde{u} = q_1 e^{\lambda_1 t} + q_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t] . \quad (1.43)$$

Man nennt

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \quad (1.44)$$

die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems. Da der Realteil  $\alpha$  der Wurzel stets negativ ist, ersetzt man ihn durch den Abklingfaktor  $-\delta$ ,

$$\delta = -\alpha = \omega_0 D = \frac{d}{(2m)} \quad (1.45)$$

und erhält damit als Lösung

$$\tilde{u} = e^{-\delta t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t] . \quad (1.46)$$

Passt man die Lösung (1.46) an die Anfangsbedingungen  $\tilde{u}(t=0) = u_0$  und  $\dot{\tilde{u}}(t=0) = \dot{u}_0$  an, so erhält man für die freie Schwingung des gedämpften Systems als Lösung

$$\tilde{u} = e^{-\delta t} \left[ u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0 + \delta u_0}{\omega} \sin \omega t \right] \quad (1.47)$$

die sich mit den Abkürzungen

$$C^2 = u_0^2 + \frac{(\dot{u}_0 + \delta u_0)^2}{\omega^2}, \quad \varphi = \arctan \left( -\frac{\dot{u}_0 + \delta u_0}{\omega u_0} \right)$$

auch

$$\tilde{u} = C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.48)$$

schreiben lässt. Der Ausschwingvorgang für eine Anfangsauslenkung  $\tilde{u}(0) = u_0$  ist in Abb. 1.19 wiedergegeben. Für die Anfangsgeschwindigkeit wurde in diesem Beispiel  $\dot{u}_0 = 0$  gesetzt. Bei diesem Ausschwingvorgang wird eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $\omega$  durch die Hüllkurve  $C e^{-\delta t}$  moduliert. Aus der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  des gedämpften Systems ergibt sich die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - D^2}}, \quad (1.49)$$

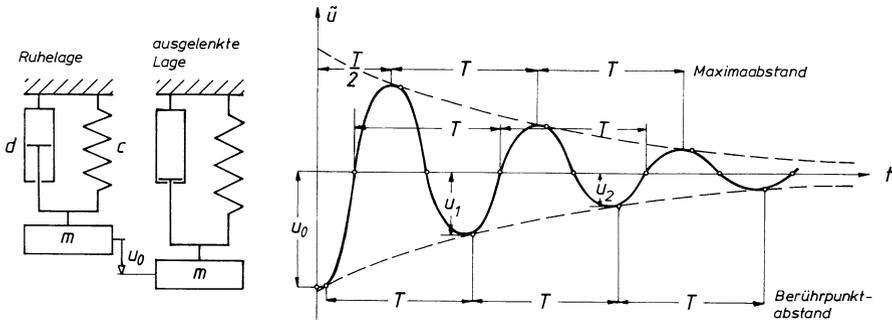


Abb. 1.19 Gedämpfter Ausschwingvorgang für die Anfangsbedingungen  $\ddot{u}(0) = u_0$  und  $\dot{u}(0) = 0$

die bei schwacher Dämpfung ( $D \ll 1$ ) nahezu identisch mit der des ungedämpften Systems ist. Durch die Schwingungsdauer wird nicht nur der Abstand der Nulldurchgänge, sondern auch der Abstand zweier aufeinander folgender Maxima oder Berührungspunkte mit der Hüllkurve angegeben (Abb. 1.19).

Der *Dämpfungsgrad*  $D$  beschreibt, wie stark die Scheitelwerte nach einer vorgegebenen Zahl  $N$  von Schwingungszyklen abgeklungen sind. Nachfolgend soll die Beziehung zwischen  $N$  und  $D$  hergeleitet werden. Das Schwingungsmaximum zu einem Zeitpunkt  $t_1$  wird mit  $u_1$  bezeichnet (Abb. 1.19). Nach  $N$  Schwingungszyklen, d. h. zur Zeit  $t_1 + NT$ , tritt wieder ein Schwingungsmaximum auf, das mit  $u_{N+1}$  bezeichnet wird. Ermittelt man die beiden Schwingungsmaxima mit Hilfe von (1.48) und bildet den Quotienten, so erhält man

$$\frac{u_1}{u_{N+1}} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t_1+NT)}} = e^{\delta NT} = e^{2\pi ND/\sqrt{1-D^2}} \quad (1.50)$$

und daraus

$$\ln\left(\frac{u_1}{u_{N+1}}\right) = \frac{2\pi ND}{\sqrt{1-D^2}} \quad (1.51)$$

Um zum Beispiel die Zahl der Schwingungszyklen, nach der die Maximalamplitude auf die Hälfte abgesunken ist, zu ermitteln, setzt man

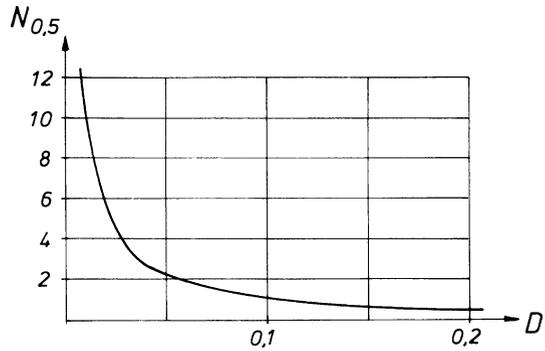
$$u_{N+1} = \frac{u_1}{2}$$

und erhält mit (1.51)

$$N_{0,5} = \frac{\ln 2 \sqrt{1-D^2}}{2\pi D} \quad (1.52)$$

Der Zusammenhang zwischen  $N_{0,5}$  und  $D$  ist in Abb. 1.20 dargestellt. Als Merkgel ist nützlich: Bei  $D = 0,1$  sinkt die Amplitude in einem Schwingungszyklus etwa auf die Hälfte ab. Der Abklingfaktor  $\delta$ , der ja die Dimension  $1/\text{Zeit}$  hat, gibt an, wie schnell die Hüllkurve – unabhängig von der Zahl der Oszillationen – absinkt.

**Abb. 1.20** Einfluss des Dämpfungsgrades auf die Zahl der Schwingungen, bis zu der die Scheitelwerte auf die Hälfte abgeklungen sind



Manchmal gibt man auch die Halbwertszeit  $T_{0,5}$  an:

$$T_{0,5} = \frac{\ln 2}{\delta} = \frac{0,693}{\delta} . \quad (1.53)$$

Das ist der Zeitpunkt, zu dem die Hüllkurve auf die Hälfte ihres Ausgangswertes abgesunken ist.

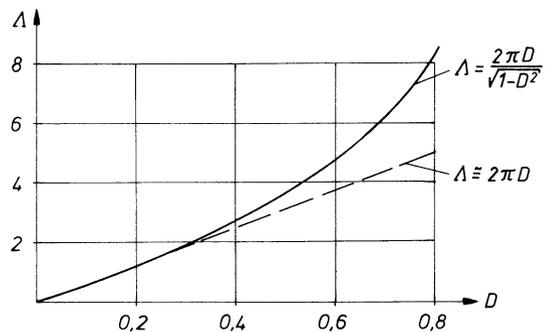
Oft ist es bei gedämpften Schwingern nicht möglich, den Dämpfungskoeffizienten  $d$  der Bewegung oder den Dämpfungsgrad  $D$  aus konstruktiven Angaben vorherzubestimmen. Sie lassen sich nur experimentell aus der ausgezeichneten Ausschwingkurve ermitteln. Eine Möglichkeit hierzu bietet (1.51). Für zwei Schwingungsmaxima  $u_1$  und  $u_{N+1}$  im Abstand von  $N$  Perioden erhält man das *logarithmische Dekrement*  $\Lambda$ , das sich experimentell ermitteln lässt:

$$\Lambda = \frac{1}{N} \ln \left( \frac{u_1}{u_{N+1}} \right) = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} . \quad (1.54)$$

Interessiert man sich noch für den Abklingfaktor  $\delta$ , so verwendet man den Zusammenhang

$$\Lambda = \delta T . \quad (1.55)$$

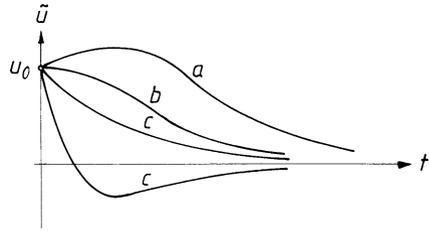
**Abb. 1.21** Verknüpfung von Dämpfungsmaß  $D$  und logarithmischem Dekrement  $\Lambda$



**Abb. 1.22** Kriechvorgänge:

a  $\dot{u}_0 > 0$ ; b  $\dot{u}_0 = 0$ ;

c  $\dot{u}_0 < 0$



Für schwache Dämpfung gilt näherungsweise, siehe auch Abb. 1.21

$$\Lambda \cong 2\pi D .$$

Ist ein System sehr schwach gedämpft, dann verändert sich die Amplitude innerhalb des Zyklus nur sehr wenig. Zur genaueren Bestimmung des Dämpfungsgrades  $D$  darf dann der Abstand  $N$  der beiden Scheitelwerte  $u_1$  und  $u_{N+1}$  nicht zu gering gewählt werden.

### 1.3.3 Kriechvorgänge, $D \geq 1$

Ist ein System sehr stark gedämpft ( $D > 1$ ), so erhält man für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda_{1,2} = \alpha_{1,2} = -\omega_0(D \pm \sqrt{D^2 - 1})$$

rein reelle, negative Werte. Führt man anstelle von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Abklingfaktoren  $\delta_1$  und  $\delta_2$  ein, d. h.  $\alpha_1 = -\delta_1$  und  $\alpha_2 = -\delta_2$ , dann gilt für die freien Schwingungen die Beziehung

$$\tilde{u} = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{-\delta_2 t} . \quad (1.56)$$

Die Bewegung aufgrund einer Anfangsstörung klingt also ohne eigentliches Schwingen ab. Abbildung 1.22 zeigt den qualitativen Verlauf solcher Kriechvorgänge in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Im sogenannten *aperiodischen Grenzfall*  $D = 1$ , der schwingende und kriechende Lösungen trennt (Tab. 1.2), erhält man eine reine reelle, negative Doppelwurzel

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0 D = -\delta .$$

Die für diesen Fall mit (1.35) bereits angegebene homogene Lösung weist zwar eine formale Besonderheit auf, sie klingt aber wie alle anderen Kriechfälle ab:

$$\tilde{u}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t} . \quad (1.57)$$

### 1.3.4 Das entdämpfte, selbsterregende System, $-1 < D < 0$

Beim Galloping-Schwinger (Beispiel 3) konnte der vor der Geschwindigkeit stehende Term  $d - a(v)$ , (1.9) durch die aerodynamische Anfachung negativ werden. Für  $|D| \leq 1$  lassen sich die Wurzeln der charakteristischen Gleichung weiterhin durch (1.31a) und (1.31b)

$$\lambda_{1,2} = \omega_0 \left[ -D \pm i\sqrt{1 - D^2} \right] = \alpha + i\omega$$

darstellen, wobei der Dämpfungsgrad  $D$  wegen

$$D = \frac{1}{2} \frac{d - a(v)}{\sqrt{sm}} \quad (1.58)$$

in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit positive oder negative Werte annehmen kann. Bei negativem Dämpfungsgrad  $D$  wird der Realteil der Wurzeln der charakteristischen Gleichung positiv. Das hat fatale Folgen für die freien Schwingungen, für die weiterhin (1.47) gilt, in der man jetzt wieder  $-\delta$  durch  $\alpha$  ersetzen kann:

$$\tilde{u} = e^{\alpha t} \left[ u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0 - \alpha u_0}{\omega} \sin \omega t \right], \quad (1.59)$$

wobei  $\omega$  und  $\alpha$  aus (1.44) und (1.45) bestimmt werden. Der Vorfaktor  $e^{\alpha t}$  sorgt für ein Aufklingen der Schwingungsbewegung, da  $\alpha$  hier positiv ist. Die Anfangsbedingungen mögen noch so klein oder gar nur durch zufällige Störungen verursacht sein, es ist ausschließlich eine Frage der Zeit (und der Größe von  $\alpha$ ), bis die Schwingungen sichtbar und gefährlich groß werden. Ein technisches System, das angefachte oder aufklingende Schwingungen ausführen kann, bezeichnet man als *oszillatorisch instabil*. Derartige Systeme sind im Allgemeinen technisch unbrauchbar.

Ganz besonders unangenehm sind Systeme wie der Galloping-Schwinger mit gleichsam chamäleonartigem Charakter (Abb. 1.8). Bei geringen Windgeschwindigkeiten überwiegt im Dämpfungskoeffizienten die Eigendämpfung  $d$  des Systems gegenüber dem Anfachungsterm  $a(v)$ . Der Dämpfungsgrad  $D$  (1.58) ist positiv. Störungen klingen, wie in (1.47) angegeben, ab. Überschreitet die Windgeschwindigkeit aber einen Grenzwert  $v_{\text{grenz}}$  für den  $D$  gerade Null wird, dann wandelt das System seinen Charakter, es wird instabil: die als Folge einer Anfangsstörung einsetzenden Eigenschwingungen klingen auf. Theoretisch ist ein Aufklingen bis zu unendlich großen Amplituden möglich, praktisch sorgen die schon erwähnten Nichtlinearitäten dafür, dass die Amplituden nicht ins Unermessliche wachsen.

Die Freileitung, das reale, technische System für den Galloping-Schwinger, verhält sich noch übler: Bei unvereister Leitung steigt der anfachende Term mit der Windgeschwindigkeit (Abb. 1.5a); die störende Galloping-Schwingung tritt erst dann in Erscheinung, wenn es aufgrund von Vereisung zu einer Profiländerung gekommen ist und falls die Windgeschwindigkeit genügend hoch ist. Um derartige

Galloping-Schwingungen zu beseitigen ist man gezwungen, dämpfende Hilfssysteme anzubringen [3].

### 1.3.5 Monotone Instabilität – Divergenz, $D \leq -1$

Mit zunehmender Windgeschwindigkeit wird der Dämpfungsgrad  $D$  immer stärker negativ. Für  $D \leq -1$  nehmen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (Tab. 1.2) rein reelle, positive Werte an. Bei derartigen rein reellen, positiven Eigenwerten tritt anstelle der oszillatorischen Instabilität monotonen Aufklingens auf, ähnlich wie es bei  $D \geq 1$  zu monotonem Abklingen kommt. Die freie Schwingung wird beim Kriechvorgang durch (1.56) beschrieben, wobei man zweckmäßigerweise wieder  $-\delta_{1,2}$  durch  $\alpha_{1,2}$  ( $\alpha_{1,2}$  positiv) ersetzt:

$$\tilde{u} = q_1 e^{\alpha_1 t} + q_2 e^{\alpha_2 t} . \quad (1.60)$$

Die Ursache der monotonen Instabilität oder Divergenz ist bei dem betrachteten Beispiel eine stark negative Dämpfung, also eine Anfachung des Systems. Wir werden in Abschn. 1.3.7 sehen, dass vor allem eine negative Steifigkeit zu einem derartigen Lösungsverhalten führt.

### 1.3.6 Wurzelortskurvendarstellung

Will man untersuchen wie sich die dynamischen Eigenschaften eines linearen Schwingers in Abhängigkeit von einem Parameter, also beispielsweise in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit  $v$ , verändern, dann greift man zur Wurzelortskurvendarstellung. Die *Wurzelortskurve* (WOK) gibt an, wie ein Eigenwert  $\lambda_i$  unter dem Einfluss der Windgeschwindigkeit  $v$  in der komplexen Zahlenebene wandert:

$$\lambda_k(v) = \alpha_k(v) + i\omega_k(v) . \quad (1.61)$$

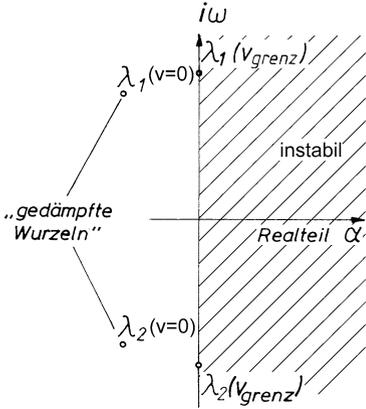
Ohne dass man irgendwelche Anfangsbedingungen zu berücksichtigen braucht, lässt sich aus dieser Darstellung schon ablesen, bei welchen Parameterwerten die Lösung gedämpft, ungedämpft oder aufklingend ist.

Abbildung 1.23a zeigt die Lage der beiden gedämpften Wurzeln des Galloping-Schwingers für  $v = 0$  und den Grenzfall  $v = v_{\text{grenz}}$ , bei dem sich das System wegen  $d_e = a(v_{\text{grenz}})$  wie ein ungedämpfter Schwinger mit

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{s}{m}}$$

verhält. Abbildung 1.23b zeigt, wie die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (Eigenwerte) mit zunehmender Windgeschwindigkeit immer stärker in den instabi-

a



b

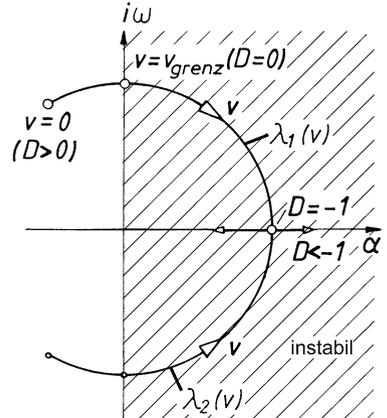


Abb. 1.23 a Lage der Wurzeln  $\lambda_{1,2}$  bei  $v = 0$  und im Grenzfall  $d_e = a (v_{\text{grenz}})$ ; b vollständige WOK  $\lambda_{1,2}(v)$  bzw.  $\lambda_{1,2}(D)$

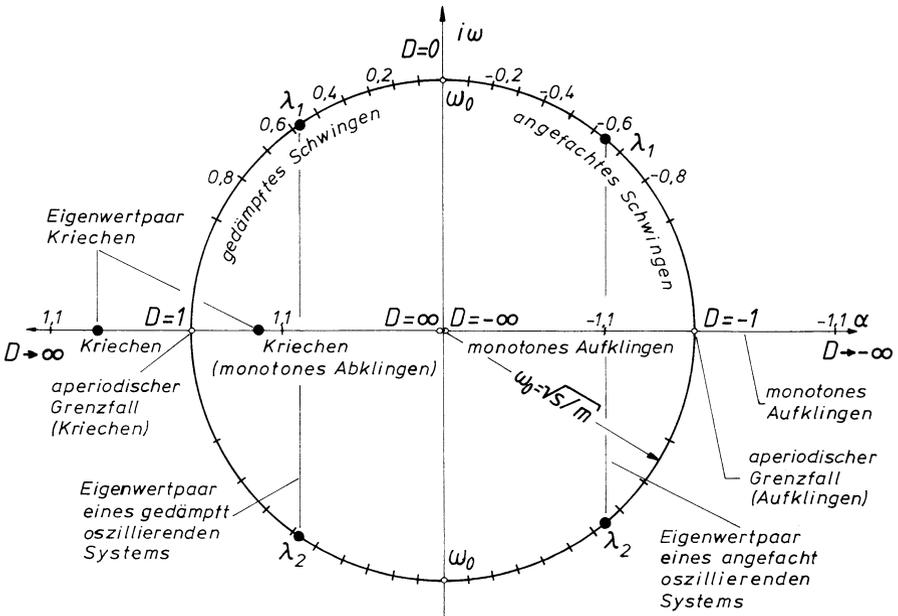


Abb. 1.24 Wandern der Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beim Ein-Freiheitsgradsystem in Abhängigkeit von  $D$

len Bereich wandern, zusammenfallen und für  $D \leq -1$  rein reelle, positive Werte annehmen. Die vollständigen Wurzelortskurven für ein Einfreiheitsgradsystem erhält man, wenn man als Parameter den Dämpfungsgrad  $D$  wählt und ihn zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  variiert.

Die beiden Wurzelortskurven sind in Abb. 1.24 wiedergegeben. Im schwingenden Bereich  $-1 < D < 1$  sind die Eigenwerte konjugiert komplex, die beiden Wurzelortskurven sind Halbkreise, die symmetrisch zur reellen  $\alpha$ -Achse angeordnet sind. Für  $D \geq 1$  erhält man zwei rein reelle, negative Eigenwerte, die beiden Wurzelortskurven ergänzen sich zur negativen  $\alpha$ -Achse; für  $D < 1$  erhält man zwei reelle, positive Eigenwerte, dementsprechend ergänzen sich die Wurzelortskurven zur positiven  $\alpha$ -Achse.

Die Wurzelortskurven von Abb. 1.24 besitzen neben dem Dämpfungsmaß  $D$  einen zweiten Parameter. Dies ist der Kreisradius  $\omega_0 = \sqrt{s/m}$ , die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems. Mit größer werdendem  $\omega_0$ , weitet sich der Kreis auf, mit kleiner werdendem  $\omega_0$  zieht er sich zusammen. Dies lässt sich auch leicht formelmäßig aus dem Zusammenhang zwischen ungedämpfter und gedämpfter Eigenkreisfrequenz ablesen. Möchte man den Radius der Wurzelortskurve ermitteln, so berechnet man diese aus dem Betrag der Eigenwerte. Quadriert man diesen Betrag, so erhält man den Ausdruck für (1.33). Der Radius bzw. Betrag des Eigenwerts ist also gleich der ungedämpften Eigenkreisfrequenz.

### 1.3.7 Negative Steifigkeit, statische Instabilität

Nicht erfasst ist in Abb. 1.24 der Fall negativer Steifigkeit, der bei dem auf dem Kopf stehenden Pendel in Abb. 1.9 auftreten konnte. Wir wollen auch diesen Fall noch kurz diskutieren. Im Fall negativer Steifigkeit brauchen (1.28) nicht weiter umgeformt zu werden. Man erkennt, da die Masse stets positiv ist, dass für den Wurzel Ausdruck in (1.28) die Beziehung

$$\sqrt{1 - \frac{4ms}{d^2}} > 1 \quad (1.62)$$

gilt. Führt man diese Beziehung in (1.28) ein, so erkennt man, dass die charakteristische Gleichung unabhängig davon, ob die Dämpfung  $d$  positiv oder negativ ist, stets zwei reelle Wurzeln besitzt, und zwar eine positive und eine negative:

$$\lambda_1 = \alpha_1 > 0, \quad (1.63a)$$

$$\lambda_2 = \alpha_2 < 0. \quad (1.63b)$$

Die Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung wird in diesem Fall wieder durch (1.34) beschrieben.

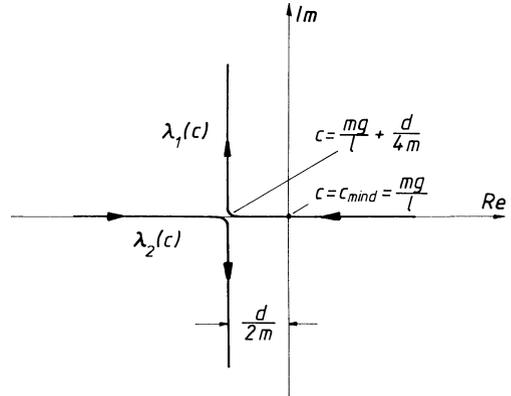
Für das auf dem Kopf stehende Pendel (1.11) lassen sich die Eigenwerte in Abhängigkeit von der Federsteifigkeit  $c$  mit der Gesamtsteifigkeit

$$s = c - mg/l$$

bestimmen zu

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{m} \left[ 1 \pm 1 - \sqrt{\frac{4m(c - mg/l)}{d^2}} \right]. \quad (1.64)$$

**Abb. 1.25** WOK des auf dem Kopf stehenden Pendels für abnehmende Federsteifigkeit  $c$ ; Mindeststeifigkeit für stabiles Verhalten  $c_{\text{mind}} = mg/l$



Anhand von Abb. 1.25 soll nun untersucht werden, wie die Wurzelortskurven für diesen Einmassenschwinger in Abhängigkeit von der Federsteifigkeit  $c$  mit  $(0 \leq c < \infty)$  aussehen. Es kann zwischen drei Bereichen unterschieden werden. Für hinreichend große Federsteifigkeit

$$c > \frac{d^2}{4m} + \frac{mg}{l}$$

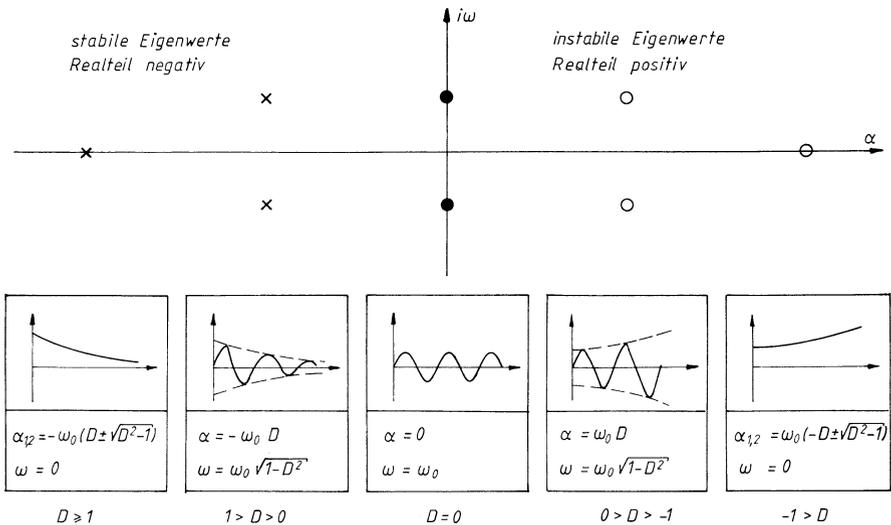
besitzt das System Schwingungseigenschaften. Das Pendel schwingt hin und her. Die Wurzelortskurven verlaufen parallel zur imaginären Achse. Der Abstand beträgt  $-d/(2m)$ . Nimmt die Steifigkeit ab, sinkt aber noch nicht unter eine Mindestfestigkeit

$$\frac{d^2}{4m} + \frac{mg}{l} \geq c > c_{\text{mind}} = \frac{mg}{l},$$

dann befindet man sich auf den Wurzelortskurven auf der negativen, reellen Achse. Das System führt monoton abklingende Bewegungen aus. Bei einer weiteren Verringerung der Federsteifigkeit

$$0 < c < c_{\text{mind}} = \frac{mg}{l}$$

wandert der Eigenwert  $\lambda_1$  aus der linken, stabilen Halbebene über die imaginäre Achse in den instabilen Bereich, während der Eigenwert  $\lambda_2$  weiterhin rein negative Werte beibehält. Aufgrund des Verhaltens von  $\lambda_1$  wird das System instabil, das Pendel fällt um (Abb. 1.25). Im Fall des Galloping-Schwingers musste man zur Ermittlung der Stabilitätsgrenze und zur Ermittlung des Parameterwertes von dem an *monotone Instabilität* (Divergenz) herrscht, die gesamte Bewegungsdifferentialgleichung betrachten. Bei dem auf dem Kopf stehenden Pendel lässt sich die Stabilitätsgrenze, wie oben gezeigt, ohne Betrachtung der zeitlichen Ableitungen ausschließlich aufgrund statischer Überlegungen ermitteln. Diese Form der Instabilität wird daher oft als *statische Instabilität* bezeichnet.



**Abb. 1.26** Bedeutung der Lage der Wurzeln (Eigenwerte)  $\lambda = \alpha \pm i\omega$  in der komplexen Zahlenebene für das Eigenverhalten

### 1.3.8 Zusammenfassung

Mit dem letzten Beispiel haben wir alle grundsätzlichen Möglichkeiten des Eigenverhaltens linearer Schwinger von einem Freiheitsgrad kennen gelernt.

In Abb. 1.26 sind für den Fall positiver Steifigkeit ( $s > 0$ , Rückführung in die Ruhelage) die Eigenwerte in der komplexen Zahlenebene und die entsprechenden Bewegungsverläufe einander zugeordnet. Da die komplexe Ebene ausgeschöpft ist, gibt es keine weiteren Verhaltensmöglichkeiten.

Auch der Fall negativer Steifigkeit ( $s < 0$ ), der uns bei dem auf dem Kopf stehenden Pendel begegnete, ist mit abgedeckt. Dort traten ein positiver und ein negativer reeller Eigenwert auf.

Alle diese Aussagen über den Bewegungsverlauf sind aber nicht nur auf Ein-Freiheitsgradsysteme beschränkt. Bei linearen Systemen – mögen sie noch so viele Freiheitsgrade besitzen – können nur diese Arten des Eigenverhaltens auftreten. Das liegt daran, dass Viel-Freiheitsgradsysteme zwar auf charakteristische Gleichungen für  $\lambda$  führen, die von höherer Ordnung als zwei sind (deshalb treten auch mehr als nur zwei Wurzeln  $\lambda_1$  auf, sodass entsprechend (1.34) auch mehr als nur zwei Eigenlösungen zu superponieren sind), jede einzelne Wurzel kann aber wiederum nur negativ, null oder positiv im Real- und Imaginärteil sein. Diese Möglichkeiten tauchen aber alle schon beim Ein-Freiheitsgradsystem auf.

## 1.4 Erzwungene Schwingung – Behandlung im Frequenzbereich

Kennzeichnend für erzwungene Schwingungen ist, dass der Bewegungsablauf  $\tilde{u}$  durch eine äußere Erregungskraft  $\tilde{p}$  bestimmt wird. Die Bewegungsdifferentialgleichung ist inhomogen, als rechte Seite taucht die Erregungskraft  $\tilde{p}$  auf.

Ist der zeitliche Verlauf der Erregungskraft bekannt, dann spricht man von *deterministischer* Erregung. Sind hingegen nur gewisse statistische Merkmale der Erregung bekannt, dann spricht man von *stochastischer* Erregung. In diesem Abschnitt werden nur deterministische Erregungsfälle behandelt. Die drei wichtigsten Erregungsarten sind in Abb. 1.27 dargestellt. Für die Untersuchung erzwungener Schwingungen gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Man kann zum einen den zeitlichen Verlauf der Systemantwort durch *direkte*, meist *numerische Integration* bestimmen. Dann spricht man von einer *Behandlung im Zeitbereich*. Das wird in Abschn. 1.5 erfolgen. Die zweite Möglichkeit, mit der wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen, ist die (algebraisierte) *Behandlung im Frequenzbereich*. In Abschn. 1.4.1 werden wir zunächst die Antwort des Systems von einem Freiheitsgrad auf eine harmonische Erregung untersuchen. Damit sind die Grundlagen für den Fall allgemeiner, periodischer Erregung geschaffen, der durch die Fourier-Analyse auf eine Summe von einharmonischen Erregungen zurückgeführt werden kann (Abschn. 1.4.2). Schließlich wird in Abschn. 1.4.3 gezeigt, dass auch eine allgemeine, transiente Erregung in ähnlicher Weise mit Hilfe der Fourier-Transformation behandelt werden kann.

In Abschn. 1.4.1 bis 1.4.3 verwenden wir die reelle Schreibweise. Die in der technischen Literatur vielfach verwendete komplexe Schreibweise behandeln wir in Abschn. 1.4.4. In Abschn. 1.4.5 werden einige Probleme erörtert, die bei der numerischen Umsetzung auftreten.

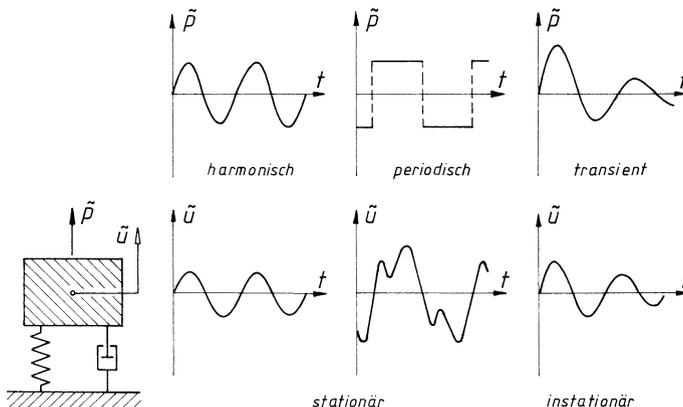


Abb. 1.27 Systemantwort auf harmonische, periodische und transiente Erregung

### 1.4.1 Harmonische Erregung

#### Resonanzverhalten und Einschwingvorgang des ungedämpften Systems

Wir betrachten zunächst das Verhalten des *ungedämpften* Ein- Freiheitsgradsystems, bei dem sich schon das typische Resonanzphänomen zeigt. Für das vertikal schwingende Turbinenfundament unter Unwucherregung (1.19) erhielt man die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{u} + s_v\dot{u} = F \cos \Omega t , \quad (1.65)$$

wobei  $\tilde{u}$  die Vertikalverschiebung des Tisches und  $F \cos \Omega t$  die Vertikalkomponente der umlaufenden Fliehkraft  $\vec{F}$  ist (Abb. 1.28).

Die Lösung der Bewegungsgleichung (1.65) setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, nämlich aus der *allgemeinen* Lösung der *homogenen* Bewegungsgleichung und aus einer *partikulären* Lösung der *inhomogenen* Bewegungsgleichung. Die vollständige Lösung erhält man durch Überlagerung der beiden Teillösungen

$$\tilde{u} = \tilde{u}_h + \tilde{u}_p . \quad (1.66)$$

Die allgemeine Lösung  $\tilde{u}_h$  der homogenen Bewegungsgleichung kennen wir schon von der Behandlung der freien Schwingungen in Abschn. 1.3. Um einen Ansatz für die partikuläre Lösung  $\tilde{u}_p$ , welcher der rechten Seite genügen muss, zu finden, geht man von der Vermutung aus, dass das System mit der Erregungsfrequenz  $\Omega$  schwingt:

$$\tilde{u}_p = u_p \cos \Omega t . \quad (1.67)$$

Setzt man diesen *Gleichtaktansatz* in die inhomogene Bewegungsgleichung (1.65) ein, so erhält man als partikuläre Lösung

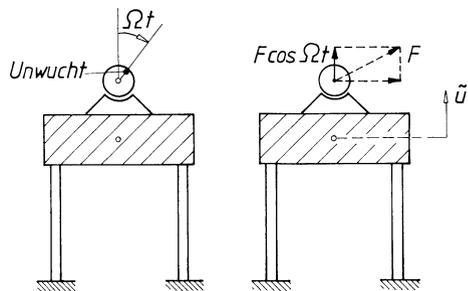
$$\tilde{u}_p = \frac{F}{s_v} \frac{1}{1 - (\Omega/\omega_0)^2} \cos \Omega t . \quad (1.68)$$

Die vollständige Lösung ergibt sich, wenn man (1.68) und (1.38) in (1.66) einführt:

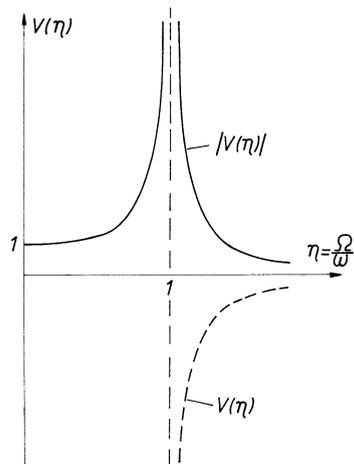
$$\tilde{u} = (B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t) + \frac{F}{s_v} \frac{1}{1 - \eta^2} \cos \omega_0 t . \quad (1.69)$$

Der erste Term von (1.69) stellt die freie Schwingung dar, die aufgrund der Dämpfungslosigkeit unseres akademischen Beispiels nie abklingt. In der Realität besitzt jedes Schwingungssystem einen Hauch von Dämpfung, der mit der Zeit zu einem Abklingen der homogenen Lösung führt. Übrig bleibt dann der zweite Term, die *stationäre Schwingungsantwort* auf harmonische Erregung. Bei dieser stationären

**Abb. 1.28** Vertikalschwingung des Turbinenfundamentes unter Unwuchterregung



**Abb. 1.29** Vergrößerungsfunktion des ungedämpften Systems



Schwingungsantwort ist

$$u_{\text{stat}} = F/s_v$$

$$\eta = \Omega/\omega_0$$

$$V = 1/(1 - \eta^2)$$

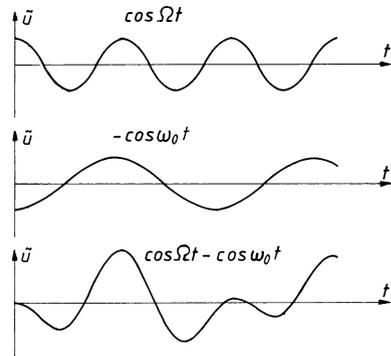
die statische Auslenkung des Systems unter einer konstanten Kraft  $F$ ,

das Verhältnis zwischen Erregungskreisfrequenz und ungedämpfter Eigenkreisfrequenz des Systems und

die sogenannte Vergrößerungsfunktion  $V$  des ungedämpften Systems.

Diese Vergrößerungsfunktion ist in Abb. 1.29 dargestellt. Man erkennt an der Vergrößerungsfunktion, dass bei einer Erregung in der Nähe der *Resonanzstelle*  $\Omega = \omega_0$  die Schwingungsauslässe enorm groß werden. Da man zumeist nur an dem Betrag der Vergrößerungsfunktion und nicht an der Phasenlage, die in der Resonanzstelle um  $180^\circ$  springt, interessiert ist, wird üblicherweise der negative Ast der Vergrößerungsfunktion jenseits der Resonanzstelle (d. h. für Werte  $\eta > 1$ ) nach oben geklappt. Man betrachtet also nur die Beträge der Vergrößerungsfunktion. Geht man davon aus dass das System vollkommen ungedämpft ist, dann klingt die homogene Lösung natürlich nicht ab, sie muss aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Für den Fall dass das Fundament zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe

**Abb. 1.30** Einschwingvorgang des ungedämpften Systems für  $\eta = \Omega/\omega = 1,63$  und die Anfangsbedingungen  $\tilde{u}(0) = 0$  und  $\dot{\tilde{u}}(0) = 0$



ist

$$\tilde{u}(0) = 0, \tag{1.70a}$$

$$\dot{\tilde{u}}(0) = 0, \tag{1.70b}$$

ergibt sich mit

$$B_1 = -\frac{F}{s_v} \frac{1}{1 - \eta^2}, \tag{1.71a}$$

$$B_2 = 0, \tag{1.71b}$$

die Lösung

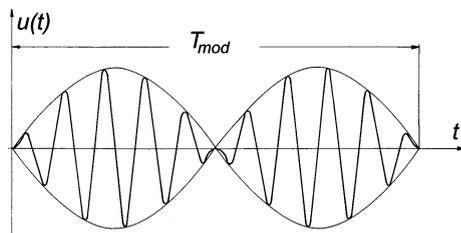
$$\tilde{u} = \frac{F}{s_v} \frac{1}{1 - \eta^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t). \tag{1.72}$$

Der freie und der erzwungene Anteil besitzen gleich große Amplituden, oszillieren aber mit unterschiedlicher Frequenz. Abbildung 1.30 zeigt, wie durch die Superposition der beiden Anteile die Anfangsbedingungen erfüllt werden. Liegt die Erregungsfrequenz in der Nähe der Eigenfrequenz,  $\Omega \cong \omega_0$ , dann entstehen die in Abb. 1.31 dargestellten *Schwebungen*. Das Schwebungsverhalten lässt sich auch formelmäßig zeigen. Führt man die folgenden Bezeichnungen für den Mittelwert und die halbe Differenz der beiden Frequenzen ein:

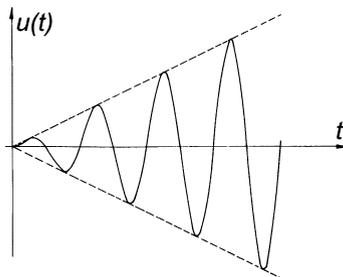
$$\omega_m = (\Omega + \omega_0)/2,$$

$$\Delta\omega = (\Omega - \omega_0)/2,$$

**Abb. 1.31** Durchmodulierte Schwebung bei  $\Omega \sim \omega_0$  ( $\eta = 1,095$ )



**Abb. 1.32** Lineares Aufklingen der Schwingung bei Erregung in der Resonanz  $\Omega = \omega_0$  (Schwebungsdauer unendlich)



dann lässt sich (1.72) auch in der Form

$$\tilde{u} = \frac{F}{s_v} \frac{1}{1 - \eta^2} [\cos(\omega_m + \Delta\omega)t - \cos(\omega_m - \Delta\omega)t]$$

schreiben, woraus man mit dem Additionstheorem für die Cosinusfunktion schließlich die Beziehung

$$\tilde{u} = \frac{F}{s_v} \frac{1}{1 - \eta^2} [-2 \sin \omega_m t \sin \Delta\omega t] \quad (1.73)$$

erhält. In der eckigen Klammer von (1.73) ändert sich bei Frequenznachbarschaft ( $\Delta\omega \ll \omega_m$ ) der Term  $\sin \Delta\omega t$  nur sehr langsam, d. h. er moduliert den schnell oszillierenden Term  $\sin \omega_m t$  mit der Modulationsperiode  $T_{\text{mod}} = 2\pi/\Delta\omega$ . Da die Schwingung zu einzelnen Zeitpunkten völlig erlischt spricht man von einer durchmodulierten Schwebung. Manchmal wird auch  $T_{\text{mod}}/2$  als Schwebungsdauer bezeichnet, weil sich von da an der Vorgang wiederholt.

Interessant ist nun noch was in dem Grenzfall in dem das System direkt mit seiner Eigenfrequenz erregt wird, d. h.  $\Omega = \omega_0$ , geschieht. In diesem Sonderfall führt die Lösung (1.72) auf einen unbestimmten Ausdruck, da partikuläre und homogene Lösung übereinstimmen und die Vergrößerungsfunktion unendlich groß wird. Die dann gültige Lösung lässt sich durch den Grenzübergang  $\Omega \rightarrow \omega_m$  und  $\Delta\omega \rightarrow 0$  beispielsweise aus (1.73) gewinnen. Das in Abb. 1.32 dargestellte Ergebnis ist recht plausibel: die Schwebungsdauer wird unendlich groß, die Schwingung klingt linear mit der Zeit auf.

### Resonanzverhalten und Einschwingvorgang des gedämpften Systems

Die Differentialgleichung zur Untersuchung der erzwungenen Schwingungen des *gedämpften* Systems lautet

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + s\tilde{u} = p^c \cos \Omega t + p^s \sin \Omega t . \quad (1.74)$$

Die vollständige Lösung der Bewegungsgleichung erhält man auch hier wieder durch Überlagerung der vollständigen Lösung der homogenen Bewegungsgleichung

und einer partikulären Lösung der inhomogenen Bewegungsgleichung. Wir wollen uns zunächst mit dieser partikulären Lösung beschäftigen.

Selbst wenn auf der rechten Seite von (1.74) nur eine cosinusförmige Erregung aufträte, wäre ein rein cosinusförmiger Ansatz für die partikuläre Lösung nicht ausreichend, da aufgrund des Dämpfungsgliedes auf der linken Seite der (1.74) auch sinusförmige Anteile eingebracht werden. Man muss daher stets einen Ansatz der Form

$$\tilde{u}_p = u^c \cos \Omega t + u^s \sin \Omega t \quad (1.75)$$

für die partikuläre Lösung einführen, mit dem sich eine beliebige, phasenverschobene Systemantwort erfassen lässt, während sich durch den reinen Cosinus-Ansatz nur Gleich- und Gegenphasigkeit zu einer cosinusförmigen Erregung ausdrücken lässt.

Durch den Ansatz (1.75) geht die Bewegungsdifferentialgleichung (1.74) in das algebraische Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} s - \Omega^2 m & \Omega d \\ -\Omega d & s - \Omega^2 m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^c \\ u^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^c \\ p^s \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

über. Löst man nach den Unbekannten  $u^c$  und  $u^s$  auf, so findet man als Lösung

$$\begin{aligned} \tilde{u}_p(t) = & \frac{(s - \Omega^2)p^c}{\Delta} \cos \Omega t + \frac{(\Omega d)p^c}{\Delta} \sin \Omega t \\ & - \frac{(\Omega d)p^s}{\Delta} \cos \Omega t + \frac{(s - \Omega^2)p^s}{\Delta} \sin \Omega t , \end{aligned} \quad (1.77)$$

wobei  $\Delta$  als Abkürzung für die Determinante der Matrix in (1.76) steht:

$$\Delta = (s - \Omega^2 m)^2 + (\Omega d)^2 . \quad (1.78)$$

Die Lösung (1.77) soll nun noch in einer zweiten, leichter interpretierbaren Form angegeben werden. Die allgemeine, harmonische Erregerkraft von (1.74), bei der es sich um eine Überlagerung aus einem sinusförmigen und einem cosinusförmigen Anteil handelte,

$$\tilde{p} = p^c \cos \Omega t + p^s \sin \Omega t , \quad (1.79)$$

formen wir zu diesem Zweck in eine rein cosinusförmige, dafür aber phasenverschobene Erregung

$$\tilde{p} = |p| \cos(\Omega t - \beta) \quad (1.80)$$

um. Mit dem Additionstheorem für die Cosinusfunktion erhält man durch Vergleich von (1.79) und (1.80) für die Maximalamplitude  $|p|$  und den Phasenwinkel  $\beta$

$$|p| = \sqrt{(p^c)^2 + (p^s)^2} , \quad (1.81a)$$

$$\beta = \arctan \left( \frac{p^s}{p^c} \right) . \quad (1.81b)$$

Der Ansatz für die partikuläre Lösung setzt sich jetzt zusammen aus einer Sinus- und einer Cosinusfunktion, beide um den Winkel  $\beta$  phasenverschoben. Die Lösung lautet dann

$$\tilde{u}_p = |p| \frac{s - \Omega^2 m}{\Delta} \cos(\Omega t - \beta) + |p| \frac{\Omega d}{\Delta} \sin(\Omega t - \beta). \quad (1.82)$$

Es liegt nahe, diese partikuläre Lösung ebenfalls als eine rein cosinusförmige, phasenverschobene Schwingung

$$\tilde{u}_p = |u| \cos(\Omega t - \psi) \quad (1.83)$$

mit

$$\psi = \beta + \gamma \quad (1.84)$$

darzustellen. Man erhält

$$|u| = |p| \frac{1}{\sqrt{(s - \Omega^2 m)^2 + (\Omega d)^2}}, \quad (1.85a)$$

$$\gamma = \arctan \frac{\Omega d}{s - \Omega^2 m}, \quad \text{Fallunterschied siehe (1.89)} \quad (1.85b)$$

sodass das Ergebnis schließlich lautet

$$\tilde{u}_p = |p| \frac{1}{\sqrt{(s - \Omega^2 m)^2 + (\Omega d)^2}} \cos(\Omega t - \beta - \gamma). \quad (1.86)$$

Der Winkel  $\gamma$  wird *Nachteilwinkel* des Systems genannt.

Mit der dimensionslos gemachten Erregerkreisfrequenz  $\eta$  und dem Dämpfungsgrad  $D$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad D = \frac{d}{2\sqrt{sm}}$$

lässt sich die Schwingungsantwort  $\tilde{u}_p$  von (1.86) auf die Form

$$\begin{aligned} \tilde{u}_p &= \frac{|p|}{s} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \cos(\Omega t - \beta - \gamma) \\ &= \frac{|p|}{s} V(\eta, D) \cos(\Omega t - \beta - \gamma) \end{aligned} \quad (1.87)$$

bringen. Die Vergrößerungsfunktion

$$V(\eta, d) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (1.88)$$

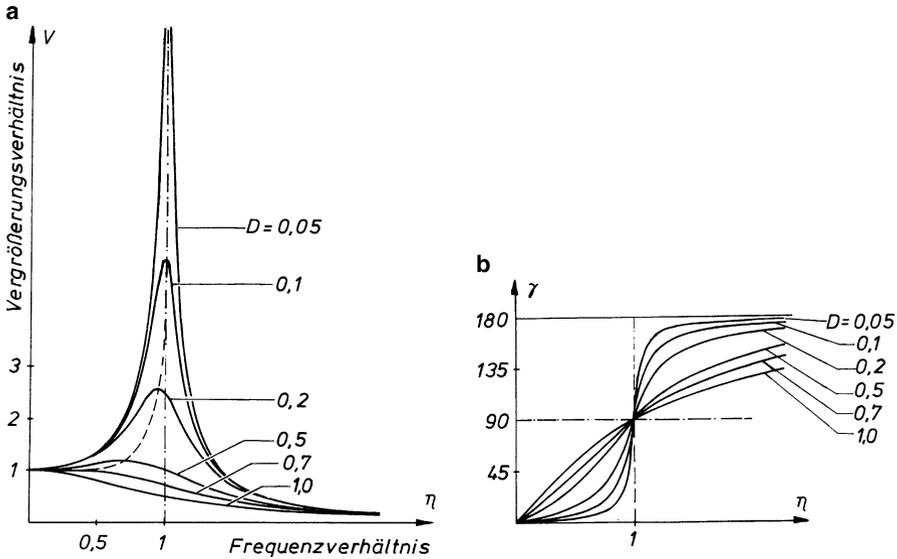


Abb. 1.33 Vergrößerungsfunktion  $V$  und Nacheilwinkel  $\gamma$  mit Dämpfungsgrad  $D$  als Parameter

gibt wie beim ungedämpften System an, um welchen Faktor die Amplituden  $|u|$  der Schwingungsantwort gegenüber der statischen Auslenkung  $|p|/s$  vergrößert oder verkleinert werden. Zusammen mit dem Nacheilwinkel

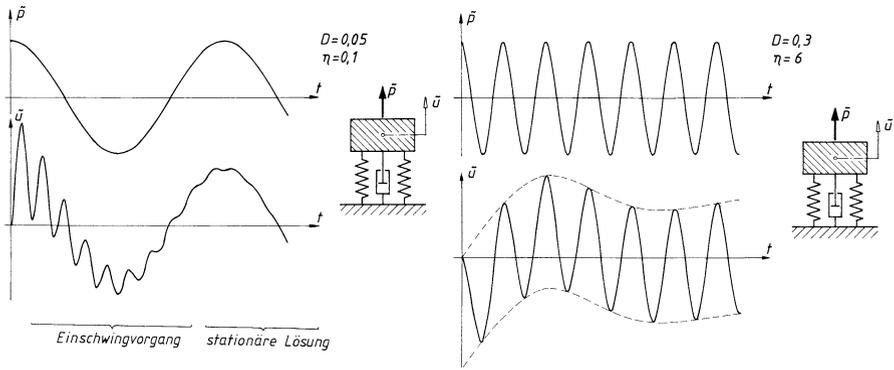
$$\gamma(\eta, D) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) & \text{für } \eta < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \eta = 1 \\ \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) + \pi & \text{für } \eta > 1 \end{cases} \quad (1.89)$$

ist die Vergrößerungsfunktion in Abb. 1.33 dargestellt. Die Schwingungsamplituden des gedämpften Systems sind – wie die Vergrößerungsfunktionen zeigen – stets kleiner als die des ungedämpften Systems. Sie bleiben auch im Resonanzfall  $\eta = 1$  endlich. Der Maximalwert der Vergrößerungsfunktion liegt bei schwacher Dämpfung dicht bei  $\eta = 1$ . Solange die Dämpfung klein ist,  $D \ll 1$ , gilt  $V_{\max} \approx 1/2D$  zur Abschätzung des Maximalwerts der Vergrößerungsfunktion.

Der ebenfalls in Abb. 1.33 dargestellte Nacheilwinkel  $\gamma$  des gedämpften Systems nimmt stetig mit  $\eta$  zu. Im Resonanzfall  $\eta = 1$  beträgt er unabhängig vom Dämpfungsgrad  $90^\circ$ . Für  $\eta \rightarrow \infty$  ergibt sich ein Nacheilwinkel von  $180^\circ$ .

Zur vollständigen Lösung (1.66) gehört auch hier wieder die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung, die mit der Lösung für die freie Schwingung des gedämpften Systems (1.46) identisch ist. Sie lautet

$$\tilde{u}_h = e^{-\delta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (1.90)$$



**Abb. 1.34** Einschwingvorgang für die Anfangsbedingungen  $\tilde{u}(0) = \dot{\tilde{u}}(0) = 0$  bei harmonischer Erregung  $p = \cos \Omega t$  für  $t > 0$

mit

$$\delta = \frac{d}{2m} \quad \text{und} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2\sqrt{ms}}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}.$$

Ist das System gedämpft und nicht angefacht, klingt die homogene Lösung ab, sodass auf die Dauer nur die partikuläre Lösung erhalten bleibt. Nur wenn Einschwingvorgänge interessieren, müssen die zunächst unbekanntenen Konstanten der homogenen Lösung aus den Anfangsbedingungen ermittelt werden. Zwei typische Einschwingvorgänge sind in Abb. 1.34 graphisch dargestellt.

### 1.4.2 Allgemeine, periodische Erregung

Da sich eine allgemeine, periodische Funktion durch die Fourier-Analyse stets in eine Summe von Einzelharmonischen zerlegen lässt, ist das Problem des Schwingers unter allgemeiner, periodischer Last rückführbar auf die in Abschn. 1.4.1 behandelte Fragestellung. Die Schwingungsantwort wird aus den Schwingungswerten der einzelharmonischen Erregungen superponiert. Eine beliebige, periodische Last  $\tilde{p}$  wird in folgender Weise durch ihre Fourier-Reihe dargestellt:

$$\tilde{p} = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [p_n^c \cos n\Omega t + p_n^s \sin n\Omega t] \quad (1.91)$$

Hierbei ist  $\Omega = 2\pi/T$  die Kreisfrequenz der Grundperiode, nach der sich der Vorgang wiederholt (Abb. 1.35). Die Fourier-Koeffizienten erhält man aus

$$p_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tilde{p} \, dt, \quad (1.92a)$$

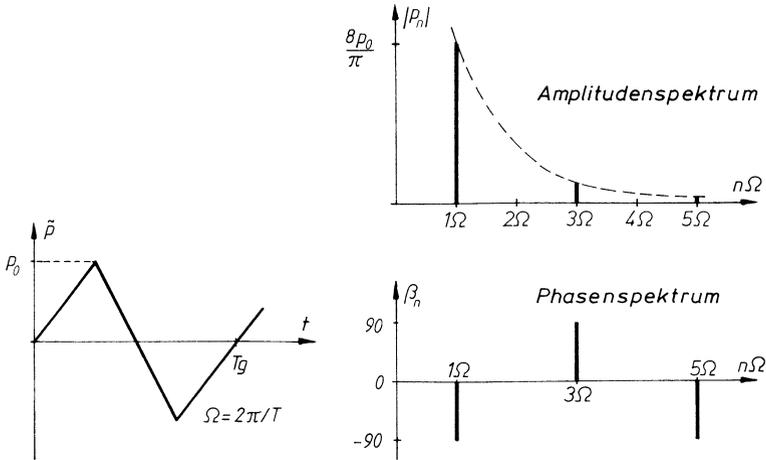


Abb. 1.35 Dreieckförmiger Erregungsverlauf und seine Darstellung im Frequenzbereich durch Amplituden- und Phasenspektren

$$p_n^c = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tilde{p} \cos n\Omega t \, dt, \quad (1.92b)$$

$$p_n^s = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tilde{p} \sin n\Omega t \, dt. \quad (1.92c)$$

Für die in Abb. 1.35 als Beispiel gegebene sägezahnförmige Erregungskraft liefert die Auswertung der Integrale beispielsweise

$$\tilde{p} = \frac{8p_0}{\pi^2} \left[ 1 \sin \Omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\Omega t + \dots \right]. \quad (1.93)$$

Wie bei der einzelharmonischen Erregung kann man auch bei Fourier-Reihen beliebiger periodischer Lasten die Sinus- und Cosinusanteile mit gleicher Frequenz zusammenfassen:

$$\tilde{p} = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |p_n| \cos(n\Omega t - \beta_n), \quad (1.94)$$

wobei dann die Amplituden  $p_n$  und die Phasenwinkel  $\beta_n$  mit den Fourier-Koeffizienten aus (1.92) durch die Beziehungen

$$|p_n| = \sqrt{(p_n^c)^2 + (p_n^s)^2}, \quad (1.95a)$$

$$\beta_n = \arctan\left(\frac{p_n^s}{p_n^c}\right) \quad (1.95b)$$

verknüpft sind. Die Gesamtheit der Amplituden  $|p_n|$  und der Phasenwinkel  $\beta_n$  bezeichnet man als *Amplitudenspektrum* und *Phasenspektrum*. Das diskrete Amplitudenspektrum und Phasenspektrum für die sägezahnförmige Erregungskraft sind in Abb. 1.35 wiedergegeben.

Ausgehend von (1.87)

$$\tilde{u}_p = \frac{|p|}{s} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2D \frac{\Omega}{\omega_0}\right]^2}} \cos(\Omega t - \beta - \gamma),$$

die die partikuläre Systemantwort auf eine *einzelne harmonische Erregerkraft*  $|p| \cos(\Omega t - \beta)$  beschreibt, lässt sich nun die Antwort auf eine allgemeine periodische Erregerkraft (1.94) durch Superposition erzeugen. Es ergibt sich

$$\tilde{u}_p = \frac{p_0}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|p_n|}{s} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{n\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2D \frac{n\Omega}{\omega_0}\right]^2}} \cos(n\Omega t - \beta_n - \gamma_n) \quad (1.96)$$

oder abgekürzt

$$\tilde{u}_p = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \cos(n\Omega t - \psi_n). \quad (1.97)$$

Der Term

$$u_0 = \frac{p_0}{s} \quad (1.98)$$

beschreibt die statische Durchsenkung unter der konstanten Last  $p_0$ . Jede Erregerkraftkomponente  $|p_n| \cos(n\Omega t - \beta_n)$  wird vom System als Einzelharmonische übertragen und liefert die Amplitude

$$|u_n| = \frac{|p_n|}{s} V_n(n\Omega, D) \quad (1.99)$$

über den zugehörigen Wert der Vergrößerungsfunktion

$$V_n(n\Omega, D) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (n\eta)^2]^2 + [2Dn\eta]^2}}. \quad (1.100)$$

Für den Phasenwinkel  $\psi_n$  der Antwort gilt analog zu (1.84)

$$\psi_n = \beta_n + \gamma_n, \quad (1.101)$$

wobei  $\gamma_n$  der Nacheilwinkel des Systems für die  $n$ -te Harmonische ist:

$$\gamma_n = \gamma_n(n\Omega, D) = \arctan\left(\frac{2Dn\eta}{1 - (n\eta)^2}\right). \quad \text{Fallunterschied siehe (1.89)} \quad (1.102)$$

In Abb. 1.36 ist für ein einfaches Beispiel dargestellt, wie aus einer periodisch veränderlichen Belastung  $\tilde{p}$  der Verschiebungsverlauf  $\tilde{u}$  berechnet wird, mit dem das Feder-Masse-Dämpfer-System antwortet. In einem *1. Schritt* wird die periodische Belastung  $\tilde{p}$  Fourier-analysiert. Aus den Fourier-Koeffizienten  $p_n^s$  und  $p_n^c$  werden Amplituden  $|p_n|$  und Phasenwinkel  $\beta_n$  der phasenverschobenen reinen Cosinus-Schwingungen bestimmt.

Für jede Erregerfrequenz muss bekannt sein, wie die Amplituden der Systemantwort gegenüber der Erregungsamplitude vergrößert werden und wie die Systemantwort phasenverschoben wird. Vergrößerungsfunktion  $V_n$ , und Nacheilwinkel  $\psi_n$  werden im *2. Schritt* ermittelt.

Damit lassen sich im *3. Schritt* Amplituden  $|u_n|$  und Phasenlagen  $\psi_n$  der Systemantwort angeben. Durch Superposition wird daraus im *4. Schritt* der Zeitverlauf der Systemantwort – im Diagramm links unten – bestimmt.

Dieser Rechnung wollen wir nun noch eine etwas andere Deutung geben. In den Gleichungen zur Ermittlung der Amplituden  $|u_n|$  und Phasenlagen  $\psi_n$  tritt der Zeitverlauf nicht auf. Die Berechnung erfolgt getrennt für jede Frequenz  $n\Omega$  oder, wie man auch sagen kann im *Frequenzbereich*. Die Fourier-Analyse der Belastung  $\tilde{p}$  ist bei dieser Betrachtung eine *Transformation* aus dem *Zeitbereich* in den *Frequenzbereich*. Alle Informationen die man vom mechanischen Modell im Frequenzbereich benötigt, sind im Amplitudengang  $V$  und im Phasengang  $\gamma$  zusammengefasst. Die abschließende Multiplikation der Amplituden  $|u_n|$  mit den phasenverschobenen Cosinus-Funktionen und die Superposition entspricht der Rücktransformation vom Frequenz- in den Zeitbereich.

### 1.4.3 Allgemeine, transiente Erregung

Eine transiente Erregung die kurzzeitig auf das System einwirkt und dann verschwindet, lässt sich in Anlehnung an die periodische Erregung im Frequenzbereich behandeln. Wir betrachten als Beispiel eine rechteckförmige Belastung der Größe  $F_0$ , die in der Zeit zwischen  $-t^*$  und  $+t^*$  auf das System einwirkt (Abb. 1.37a und b). Wir führen zunächst bei festgehaltener Einwirkungsdauer ( $t^* = \text{const.}$ ) eine fiktive Periodendauer  $T$  ein. Die Periodendauer soll anschließend unendlich