

Frauke Ulfig

# Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben

Triangulation quantitativer und qualitativer Zugänge

**RESEARCH**



**Springer** Spektrum

---

# Perspektiven der Mathematikdidaktik

**Herausgegeben von**

G. Kaiser, Hamburg, Deutschland

R. Borromeo Ferri, W. Blum, Kassel, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

**Herausgegeben von**

Prof. Dr. Gabriele Kaiser  
Universität Hamburg

Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri,  
Prof. Dr. Werner Blum,  
Universität Kassel

---

Frauke Ulfig

# Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben

Triangulation quantitativer und qualitativer Zugänge

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Michael Neubrand



Springer Spektrum

RESEARCH

Frauke Ulfig  
Eckernförde, Deutschland

Dissertation Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2011

ISBN 978-3-658-00587-0

ISBN 978-3-658-00588-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-658-00588-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
[www.springer-spektrum.de](http://www.springer-spektrum.de)

## Geleitwort

Für die Tests im Jahr 2003, also beim zweiten Zyklus der PISA-Studie, wurde erstmals Mathematik als die sog. „major domain“ genommen. Auf der Basis des damals umfangreicheren Aufgabenbestands wurden zwei Charakteristika der mathematischen Leistungen in Deutschland identifiziert: Die Förderung der leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler schien das Kernproblem für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in Deutschland zu sein, und die deutlichsten inhaltlichen Defizite gab es in der Geometrie. Dennoch hat sich an den Schwerpunkten der mathematikdidaktischen Forschung seither nur wenig geändert. Nach wie vor finden wir die Mehrzahl der Arbeiten zum Mathematikunterricht im gymnasialen Bereich der Sekundarstufe-I, nicht etwa zum Mathematikunterricht an den Hauptschulen. Noch verstärkt gilt das für das Teilgebiet Geometrie. Somit reagiert die vorliegende Arbeit von Frauke Ulfig passgenau auf die mit PISA-2003 erkannten zentralen Probleme: Sie wählt Geometrie und blickt gezielt auf Schülerinnen und Schüler aus Hauptschulen.

Alein aus den Daten hergeleitete bildungspolitische oder mathematikdidaktische Desiderata definieren jedoch noch keinen Forschungsansatz und erst Recht keinen Entwicklungsansatz. Dazu bedarf es eben beider Seiten, der umfangreichen Daten als Evidenzbasis – diese liegen mit PISA vor – und der Einsicht in das individuelle und aufgabenbezogene geometrische Denken – und dazu muss ein geeignetes Untersuchungsdesign entworfen werden. Frauke Ulfig geht in vier Stufen vor: Auf das (videographierte) Lösen ausgewählter PISA-Aufgaben durch jeweils Paare von Hauptschülerinnen und -schülern folgt ein *Nachträgliches Lautes Denken*, das durch das Zeigen bestimmter Abschnitte des Videos gezielt unterstützt werden kann; sodann kommen zwei reflektierende Elemente, ein Interview (leitfadengestützt) und ein abermaliges, beobachtetes Lösen der Aufgaben. So gelingt es, Analysen von Lösungsprozessen von Aufgaben in angemessener Differenziertheit durchzuführen.

Die Grundbedingungen dafür sind wieder mit PISA verknüpft: Aufgrund der gerade von der deutschen PISA-Expertengruppe, der auch Frauke Ulfig seinerzeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin angehörte, sehr differenziert durchgeführten Aufgaben-Analyse und (soweit es die deutschen Zusatzaufgaben betrifft) Aufgaben-Konstruktion konnte man auf ein Aufgabenset zugreifen, das zentrale mathematische Denkweisen abbildet, insbesondere auf eine hinreichende Anzahl von Aufgaben, die nicht den in der Schule dominierenden Berechnungen, sondern der begrifflichen Vertiefung gewidmet waren. Zudem liefert bereits PISA keineswegs nur Prozentzahlen korrekter Lösungen; wir



Es mag für manche Beobachter überraschend sein, dass large-scale-Untersuchungen wie PISA die fachdidaktische Entwicklungsarbeit beeinflussen können. Dieses Potential muss aber erst erschlossen werden, denn eine large-scale-Studie ist kein Entwicklungsprojekt. Die Arbeit von Frauke Ulfig ist wohl eine der ersten, die auf der Basis von PISA-Aufgaben und mit den PISA-Resultaten im Hintergrund den Schritt von empirischen großflächigen Studien zum individuellen Verhalten bei der Lösung konsequent umsetzt – und damit Entwicklungsperspektiven öffnet.

Oldenburg, im September 2012

Michael Neubrand

## Dank

Allen Personen, die mich im Laufe meiner Forschungsarbeit und beim Entstehen dieser Arbeit unterstützt haben, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Zuerst danke ich den Schülerinnen und Schülern, die für mich Geometrieaufgaben bearbeitet haben und mir geduldig ihre Vorgehensweisen und Vorstellungen und vor allem auch ihre Schwierigkeiten und Fehler näher gebracht haben. Bei den Schulleiterinnen und Schulleitern sowie bei den Mathematiklehrkräften der ausgewählten Schulen bedanke ich mich dafür, dass sie mir bereitwillig Türen geöffnet haben. Ohne die Kooperation derer, die täglich Unterricht praktizieren, ist empirische Forschung nicht möglich.

Prof. Dr. Michael Neubrand, dem Betreuer meiner Dissertation, gilt mein besonderer Dank. Er holte mich nach Beendigung des Referendariats wieder an die Universität zurück, indem er mein Interesse an der PISA-Studie aufgriff und mir anbot, an der Konzeption und Auswertung der PISA-Studie 2003 in der Arbeitsgruppe Mathematik mitzuarbeiten. Prof. Dr. Michael Neubrands differenzierter Überblick über Zugänge, Tätigkeiten und Sichtweisen der (Schul-) Geometrie war für meine Orientierung in diesem weiten Feld äußerst hilfreich. Seine stoffdidaktischen Grundlagenanalysen und das diesen Sichtweisen zugrunde liegende Konzept hinter den nationalen Geometrieaufgaben der PISA-Studie sind für diese Arbeit von großem Wert.

Auch den weiteren Mitgliedern der PISA-Arbeitsgruppe Mathematik 2003 danke ich für anregende Diskussionen und inspirierende Analysen. Den zuständigen PISA-Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des IPN in Kiel und des IEA Data Processing and Research Center in Hamburg danke ich dafür, dass sie mir die benötigten PISA-Daten zur Verfügung stellten und auftretende technische Probleme lösten.

Den Doktorandinnen und Doktoranden des Studiengangs „ProDid – Didaktische Rekonstruktion“ der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, ihren Betreuerinnen und Betreuern und weiteren Referenten sei gedankt für Gespräche und Anregungen, vor allem aus der Perspektive der qualitativen Forschung. Bei Prof. Dr. Ulrich Kattmann, dem „Erfinder“ der „Didaktischen Rekonstruktion“, möchte ich mich für die frühe Wertschätzung und sein besonderes Interesse an meiner Forschungsarbeit bedanken. Das hat mich sehr motiviert und führte letztendlich dazu, dass Prof. Dr. Ulrich Kattmann Zweitgutachter dieser Arbeit wurde.

Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Doktorandenkolloquiums der Universitäten in Bremen und Oldenburg hatten entscheidende Ideen für die Auswertung und die Darstellung der Ergebnisse, auch dafür vielen Dank. Ramona Jansing und Marco Jürgens sei gedankt für zwei gelungene Masterarbeiten, die das Thema meiner Dissertation aufgreifen und weiterführen.

Manuela Hillje, Stephanie Schlump, Ariane Springfeld, Anja Oberle, Kerstin Triphaus und Annegret Wittkuhn haben Teile der Arbeit gründlich Korrektur gelesen. Dafür gilt ihnen mein besonderer Dank. Technische Unterstützung zum Fertigstellen der Druckversion fand ich bei meiner Lektorin Britta Göhrisch-Radmacher und bei Sascha Ulfig.

Meinem Mann, Sascha Ulfig, sowie meiner Familie danke ich abschließend dafür, dass sie mich mehrere Jahre lang vielfältig und geduldig unterstützt haben und damit einen entscheidenden Beitrag zum Fertigstellen dieser Arbeit leisteten.

Frauke Ulfig

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das Grundbildungskonzept von PISA</b> .....	<b>5</b>
2.1	Das Grundbildungskonzept als Orientierungsrahmen der PISA-Studie.....	5
2.1.1	„Mathematical Literacy“ und „Mathematische Grundbildung“ – mathematikdidaktische Hintergründe.....	5
2.1.2	Die übergreifenden Ideen und Kompetenzklassen als Konstruktionsmerkmale des internationalen PISA-Tests.....	10
2.1.3	Realisierung „mathematischer Grundbildung“ in den drei „Typen mathematischen Arbeitens“ beim nationalen PISA-Test.....	12
2.1.4	Die Struktur des Aufgabenmodells beim nationalen PISA-Test.....	13
2.1.5	Anlage und Umsetzung bei PISA 2003.....	20
2.2	Operationalisierung des Grundbildungskonzepts.....	24
2.2.1	Zur Multiperspektivität der Schulgeometrie.....	25
2.2.2	Geometrie in den NCTM-Standards, im britischen Geometry-Report und in den deutschen Bildungsstandards.....	28
2.2.3	Umsetzung von geometrischen Basiskompetenzen in den nationalen Geometrieaufgaben der PISA-Studie.....	31
<b>3</b>	<b>Geometrisches Denken und Begriffsbildung im Mathematikunterricht</b> ..	<b>37</b>
3.1	Grundlegende Aspekte geometrischen Denkens.....	37
3.1.1	Geometrisches Denken, geometrische Begriffsbildung und geometrische Denkweisen – Terminologisches.....	37
3.1.2	Geometrie als Vorbild für die Mathematik – zur Bedeutung geometrischen Denkens.....	38
3.1.3	Bilden geometrischer Begriffe.....	43
3.1.4	Die Begriffe „Umfang“ und „Flächeninhalt“ in der Schulgeometrie.....	51
3.1.5	Besondere Aspekte des Geometrielerrens in der Hauptschule.....	58
3.2	Sichtweisen aus Kognitionspsychologie und Mathematikdidaktik.....	62
3.2.1	Das van-Hiele-Modell zur Entwicklung geometrischer Begriffe.....	62
3.2.2	Aebli's Unterrichtsversuch über die Berechnung von Umfang und Fläche des Rechtecks.....	67
3.2.3	Das operative Prinzip im Geometrieunterricht.....	70
3.2.4	Schwierigkeiten bei der Vermittlung geometrischer Begriffe.....	73
<b>4</b>	<b>Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion als Orientierungsrahmen</b>	<b>77</b>
<b>5</b>	<b>Methodologie und methodisches Vorgehen</b> .....	<b>81</b>

5.1	Methodologische Grundlagen .....	81
5.1.1	Zur Verbindung quantitativer und qualitativer Ansätze .....	81
5.1.2	Analysen von PISA-Daten .....	85
5.1.3	Analysen der ergänzenden, qualitativen Studie.....	88
5.1.4	Geltungsanspruch und Gültigkeit.....	97
5.2	Design und Datenerhebung .....	100
5.2.1	Kriterien zur Auswahl der Untersuchungsaufgaben.....	100
5.2.2	Auswahl der Probanden .....	104
5.2.3	Ein vierphasiges Design als Hintergrundmodell für die qualitativen Analysen .....	105
5.2.4	Entwicklung des Interviewleitfadens .....	109
5.3	Auswertung und Auswertungsmethoden .....	112
5.3.1	Dokumentation der Ergebnisse und nachfolgende Beschreibung und Strukturierung geometrischer Denkweisen .....	112
5.3.2	Horizontale Analyse der Daten .....	112
5.3.3	Kodieren des Datenmaterials .....	114
<b>6</b>	<b>Analysen der Untersuchungsaufgaben .....</b>	<b>119</b>
6.1	Vorgehensweisen bei den Analysen der Untersuchungsaufgaben.....	119
6.2	Rechteck – die Einstiegsaufgabe zum geometrischen Grundwissen.....	120
6.2.1	Umsetzung von Geometrie in der Aufgabe .....	120
6.2.2	Eigenschaften der Aufgabe im Modell mathematischer Aufgaben bei PISA .....	122
6.2.3	Einordnung in den Lehrplan, die Bildungsstandards und die NCTM-Standards .....	122
6.2.4	Mögliche Lösungswege, Schwierigkeiten und Fehler .....	124
6.2.5	PISA-Ergebnisse einer ähnlichen Aufgabe aus PISA 2000 .....	125
6.2.6	Die Verwendung von Beschriftungen, Variablen und Formeln als Aspekt für die Auswertung und Analyse.....	126
6.3	L-Fläche – Berechnung einer zusammengesetzten Figur.....	128
6.3.1	Umsetzung von Geometrie in der Aufgabe .....	128
6.3.2	Eigenschaften der Aufgabe im Modell mathematischer Aufgaben bei PISA .....	129
6.3.3	Einordnung in den Lehrplan, die Bildungsstandards und die NCTM Standards .....	130
6.3.4	Mögliche Lösungswege, Schwierigkeiten und Fehler .....	132
6.3.5	PISA-Ergebnisse der Aufgabe „L-Fläche“ .....	138
6.3.6	Ergänzende Analysen von PISA-Bearbeitungen zu individuellen Vorgehensweisen .....	139

6.3.7	Wege der Berechnung über Teilfiguren als Aspekt für die Auswertung und Analyse .....	154
6.4	Wandfläche – eine Aufgabe mit außermathematischem Kontext .....	156
6.4.1	Umsetzung von Geometrie in der Aufgabe .....	156
6.4.2	Eigenschaften der Aufgabe im Modell mathematischer Aufgaben bei PISA .....	157
6.4.3	Einordnung in die Bildungsstandards, den Lehrplan und die NCTM Standards .....	158
6.4.4	Mögliche Lösungswege, Schwierigkeiten und Fehler .....	159
6.4.5	PISA Ergebnisse der Aufgabe „Wandfläche“ .....	163
6.4.6	Ergänzende Analysen der Aufgabe „Wandfläche“ zum Vorkommen von Rechnungen und Skizzen .....	165
6.4.7	Erfassen des Aufgabekontexts als Aspekt für die Auswertung und Analyse .....	179
6.5	Zimmermann – eine internationale PISA-Aufgabe .....	181
6.5.1	Umsetzung von Geometrie in der Aufgabe .....	181
6.5.2	Eigenschaften der Aufgabe im Modell mathematischer Aufgaben bei PISA .....	183
6.5.3	Einordnung in den Lehrplan, die Bildungsstandards und die NCTM-Standards .....	184
6.5.4	Mögliche Lösungswege, Schwierigkeiten und Fehler .....	185
6.5.5	Bericht der PISA-Ergebnisse der Aufgabe .....	187
6.5.6	Erfassen inhaltlicher Vorstellungen zum Begriff „Umfang“ als Aspekt für die Auswertung und Analyse .....	188
<b>7</b>	<b>Dokumentation der Ergebnisse .....</b>	<b>191</b>
7.1	Ergebnisse der Untersuchungsaufgabe „Rechteck“ .....	191
7.1.1	Zur Verwendung von Beschriftungen, Variablen und Formeln und weitere Ergebnisse .....	191
7.1.2	Schwierigkeiten und Fehler .....	194
7.2	Ergebnisse der Untersuchungsaufgabe „L-Fläche“ .....	196
7.2.1	Verschiedene Wege der Berechnung über Teilfiguren und weitere Ergebnisse .....	196
7.2.2	Schwierigkeiten und Fehler .....	198
7.3	Ergebnisse der Untersuchungsaufgabe „Wandfläche“ .....	203
7.3.1	Vorgehensweisen in Bezug auf den Aufgabekontext und weitere Ergebnisse .....	203
7.3.2	Schwierigkeiten und Fehler .....	209
7.4	Ergebnisse der Untersuchungsaufgabe „Zimmermann“ .....	212

7.4.1	Hinweise zu inhaltlichen Vorstellungen des Begriffs „Umfang“ und weitere Ergebnisse .....	212
7.4.2	Schwierigkeiten und Fehler .....	219
7.5	Vorstellungen der Begriffe „Umfang“ und „Flächeninhalt“ .....	222
<b>8</b>	<b>Analysen der Ergebnisse .....</b>	<b>231</b>
8.1	Verbindung qualitativer und quantitativer Ergebnisse .....	231
8.1.1	Verbindung mit den PISA-Ergebnissen der ähnlichen Aufgabe „Rechteck“ aus PISA 2000 .....	231
8.1.2	Verbindung mit den PISA-Ergebnissen der Aufgabe „L-Fläche“ .....	231
8.1.3	Verbindung mit den PISA-Ergebnissen der Aufgabe „Wandfläche“ .....	234
8.1.4	Verbindung mit den PISA-Ergebnissen der Aufgabe „Zimmermann“ .....	236
8.2	Von den Daten zur Theorie.....	237
8.3	Strukturierung geometrischer Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben .....	247
8.3.1	Begriff ist Formel.....	247
8.3.2	Dominanz des Berechnens.....	253
8.3.3	Einschränkung auf Bekanntes .....	258
8.3.4	Messen statt Strukturieren.....	260
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>265</b>
9.1	Zusammenfassung .....	265
9.2	Ausblick .....	268
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>273</b>

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1:	Verteilung der internationalen Aufgaben nach Inhaltsbereichen und internationalen Kompetenzklassen (Blum u.a. 2004, S. 51) .....	21
Tabelle 2:	Verteilung der nationalen Aufgaben nach Stoffgebieten und Typen mathematischen Arbeitens (Blum u.a. 2004, S. 58) .....	22
Tabelle 3:	Gegenüberstellung der Anzahl internationaler und nationaler Geometrieaufgaben in den internationalen Kompetenzklassen .....	22
Tabelle 4:	Gegenüberstellung der Anzahl internationaler und nationaler Geometrieaufgaben in den drei Typen mathematischen Arbeitens.....	23
Tabelle 5:	Gegenüberstellung der Anzahl internationaler und nationaler Geometrieaufgaben in den nationalen Kompetenzklassen .....	23
Tabelle 6:	Facetten der Schulgeometrie in den nationalen Aufgaben der PISA-Studie 2003 .....	33
Tabelle 7:	Einteilung geometrischer Begriffe in Figurenbegriffe, Abbildungsbegriffe und Maßbegriffe nach Holland (1996, 157) .....	44
Tabelle 8:	Verschiedene Wege der Zerlegung der PISA-Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabe „L-Fläche“ .....	142
Tabelle 9:	Häufige, falsche Ergebniszahlen in den Bearbeitungen der PISA-Schülerinnen und Schüler bei der Berechnung des Flächeninhalts der Aufgabe „L-Fläche“ .....	146
Tabelle 10:	Häufige, falsche Ergebniszahlen in den Bearbeitungen der PISA-Schülerinnen und Schüler bei der Berechnung des Umfangs der Aufgabe „L-Fläche“ .....	150
Tabelle 11:	Vorkommen von Rechnungen und Skizzen in allen Bearbeitungen der Hauptschülerinnen und Hauptschüler, die an PISA teilnahmen..	166
Tabelle 12:	Vorkommen von Rechnungen und Skizzen in allen erfolgreichen Bearbeitungen der PISA-Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabe „Wandfläche“ .....	167
Tabelle 13:	Beispiele des offenen Kodierens von Bearbeitungen der Untersuchungsaufgabe „Zimmermann“ .....	240
Tabelle 14:	Beispiel der horizontalen Bearbeitung über die vier Erhebungsphasen anhand ausgewählter Zitate zur Aufgabe „Wandfläche“ (Emma) .....	241
Tabelle 15:	Übergang von der ersten Liste offener Codes zur Bildung vorläufiger Kategorien am Beispiel vergebener Codes zur Aufgabe „Zimmermann“ .....	243

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Ein Schema für den Modellierungsprozess bei mathematischen Aufgaben (Neubrand 2004, 36, vgl. de Lange, 1987 sowie Blum, 2002) .....	14
Abbildung 2: Das hinter dem PISA-Framework stehende Aufgabenmodell – Zentrale Eigenschaften und vielfältige spezifische Itemmerkmale (Neubrand 2004, S. 37) .....	16
Abbildung 3: PISA-Aufgabe Rechteck (Klieme u.a. 2001, 152).....	17
Abbildung 4: PISA-Aufgabe Tischdecke (Blum u.a. 2004, 59) .....	17
Abbildung 5: Aufgabengruppe Knoten (Neubrand 2004, 264).....	19
Abbildung 6: Drei Dimensionen des Feldes Schulgeometrie.....	26
Abbildung 7: Aufgabenbeispiel zum geometrischen Grundwissen (aus PISA 2003 – national) .....	34
Abbildung 8: Aufgabenbeispiel zum Erkennen von Zusammenhängen als Vorstufe zum Beweisen (aus PISA 2003 – national) .....	35
Abbildung 9: Gärtnerkonstruktion einer Ellipse (Abdruck mit freundlicher Genehmigung der Martin Luther Universität Halle-Wittenberg).....	40
Abbildung 10: Haus der Vierecke (dargestellt bei Franke 2000, 81).....	45
Abbildung 11: Piaget-Experiment zum Flächeninhalt .....	54
Abbildung 12: Gelenkfiguren zur Veranschaulichung, dass bei gleichem Umfang der Flächeninhalt unterschiedlich sein kann (Franke 2000, 256) .....	56
Abbildung 13: Aufgabe zum Legen mit Streichhölzern aus altem Schulbuch (gefunden bei Radatz 1991, 76) .....	57
Abbildung 14: Plan eines Gartens nach zwei Vergrößerungen. Die neun in der Figur enthaltenen Rechtecke waren Gegenstand einer operativen Übung der „modernen Gruppe“ im Unterrichtsversuch Aebli (1963, 132).....	68
Abbildung 15: Unterschiedliche Dreiecke am sechsgeteilten Kreis (Pohle und Reiss 1999, 32).....	73
Abbildung 16: Szenario zum Zusammenhang der Begriffe „Umfang“ und „Flächeninhalt“ aus einer Untersuchung von Ma (Ma 1999, 84).....	75
Abbildung 17: Das fachdidaktische Triplet des Modells der Didaktischen Rekonstruktion (Kattmann und Gropengießer 1996).....	78
Abbildung 18: Positionierung des Forschungsvorhabens im fachdidaktischen Triplet des Modells der Didaktischen Rekonstruktion.....	80

Abbildung 19: Der „rollende“ Forschungsprozess der Grounded Theory Methodologie (Mey und Mruck 2009, 111) .....	95
Abbildung 20: Untersuchungsaufgabe „Rechteck“, ähnlich der Aufgabe „Rechteck“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2000 (vgl. Klieme u.a. 2001, 152).....	102
Abbildung 21: Untersuchungsaufgabe „L-Fläche“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2003 (vgl. Blum u.a. 2004, 47-92).....	102
Abbildung 22: Untersuchungsaufgabe „Wandfläche“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2003 (vgl. Blum u.a. 2004, 47-92).....	103
Abbildung 23: Untersuchungsaufgabe „Zimmermann“ aus dem internationalen Test der PISA-Studie 2003 (OECD 2004, 52) .....	104
Abbildung 24: Vierphasiges Design der ergänzenden, qualitativen Studie als Erweiterung des Dreistufendesigns (vgl. Busse, Borromeo Ferri, 2003) .....	107
Abbildung 25: Schema der horizontalen Strukturierung der Daten (Busse und Borromeo Ferri 2003, 170) .....	113
Abbildung 26: Kodieren als kontinuierlicher Prozess in der Darstellung von Mey und Mruck (2009, 118).....	116
Abbildung 27: Untersuchungsaufgabe „Rechteck“ ähnlich der Aufgabe „Rechteck“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2000 (vgl. Klieme u.a. 2001, 152).....	120
Abbildung 28: Aufgabe „Rechteck“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2000 (Klieme u.a. 2001, 152).....	121
Abbildung 29: Häufigkeiten der Ergebnisvarianten bei der Aufgabe „Rechteck“ aus PISA 2000 .....	126
Abbildung 30: Untersuchungsaufgabe „L-Fläche“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2003 (vgl. Blum u.a. 2004, 47-92).....	128
Abbildung 32: Berechnen der fehlenden Seitenlänge bei der Aufgabe L-Fläche (waagerechte Strecke: 3 cm).....	132
Abbildung 31: Berechnen der fehlenden Seitenlänge bei der Aufgabe L-Fläche (senkrechte Strecke: 3 cm).....	132
Abbildung 33: Zerlegen der L-Fläche in zwei Rechtecke – größeres Rechteck liegend.....	133
Abbildung 34: Zerlegen der L-Fläche in zwei Rechtecke – größeres Rechteck stehend .....	133
Abbildung 35: Zerlegen der L-Fläche in zwei Rechtecke und ein Quadrat .....	134
Abbildung 36: Ergänzen der L-Fläche zu einem großen Rechteck und Abziehen des kleinen Rechtecks .....	134

Abbildung 37: Zerlegen der L-Fläche in zwei Rechtecke und Ergänzen zu einem langen Rechteck.....	135
Abbildung 38: Zerlegen der L-Fläche in zwei Trapeze .....	135
Abbildung 39: Zerlegen der L-Fläche in zwei Rechtecke und Ergänzen zu einem langen Rechteck.....	136
Abbildung 40: Lösungshäufigkeiten der Teilaufgaben bei der Aufgabe „L-Fläche“ aus der PISA-Studie 2003.....	139
Abbildung 41: Schülerkommentar zur Aufgabe „L-Fläche“ unter den Bearbeitungen der PISA-Hauptschülerinnen und -Hauptschüler.....	140
Abbildung 42: Bearbeitungen der Aufgabe „L-Fläche“, die ausschließlich Formeln enthalten .....	141
Abbildung 43: Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit den beiden häufigsten Fehlern .....	145
Abbildung 44: Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 27 cm <sup>2</sup> für Flächeninhalt .....	148
Abbildung 45: Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 45 cm <sup>2</sup> für Flächeninhalt.....	148
Abbildung 46: Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 68 cm <sup>2</sup> für Flächeninhalt .....	148
Abbildung 47: Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 56 cm <sup>2</sup> .....	149
Abbildung 48: Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 28 cm <sup>2</sup> für Flächeninhalt.....	149
Abbildung 49: Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 40 cm <sup>2</sup> für Flächeninhalt.....	149
Abbildung 50: Beispiel einer Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 1120 cm <sup>2</sup> für Umfang.....	151
Abbildung 51: Beispiel einer Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 36 cm für Umfang.....	152
Abbildung 52: Beispiel einer Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 42 cm für Umfang.....	152
Abbildung 53: Bearbeitung der Aufgabe „L-Fläche“ mit dem Ergebnis 28 cm für Umfang.....	152
Abbildung 54: Beispiele zweier Bearbeitungen der Aufgabe „L-Fläche“, bei denen gemessen wurde, ersichtlich in der Zeichnung, beziehungsweise in der Rechnung.....	153
Abbildung 55: Untersuchungsaufgabe „Wandfläche“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2003 (vgl. Blum u.a. 2004, 47-92).....	156

Abbildung 56: Häufigkeiten der Ergebnisvarianten bei der Aufgabe „Wandfläche“ aus PISA 2003 .....	164
Abbildung 57: richtige PISA-Bearbeitung mit Skizze (Hauptschule) .....	168
Abbildung 58: richtige PISA-Bearbeitungen mit Skizze und Rechnung (Hauptschule) .....	169
Abbildung 59: richtige PISA-Bearbeitungen mit Rechnung (Hauptschule) .....	170
Abbildung 60: falsche PISA-Bearbeitungen mit Skizze (Hauptschule) .....	171
Abbildung 61: falsche PISA-Bearbeitung mit Skizze und Rechnung .....	172
Abbildung 62: falsche PISA-Bearbeitungen mit Rechnung (Hauptschule) .....	173
Abbildung 63: „Schrägbilder“ – Skizzen der PISA-Schülerinnen und Schüler aller Schularten in den richtigen Bearbeitungen zur Aufgabe „Wandfläche“ .....	175
Abbildung 64: „Rechteck“ – Skizzen der PISA-Schülerinnen und -Schüler aller Schularten in den richtigen Bearbeitungen der Aufgabe „Wandfläche“ .....	175
Abbildung 65: „Rechteck mit Höhe“ – Skizzen der PISA-Schülerinnen und Schüler aller Schularten in den richtigen Bearbeitungen zur Aufgabe „Wandfläche“ .....	176
Abbildung 66: „Einzelne Flächen“ – Skizzen der PISA-Schülerinnen und -Schüler aller Schularten in den richtigen Bearbeitungen der Aufgabe „Wandfläche“ .....	176
Abbildung 67: Sonstige Skizzen der PISA-Schülerinnen und -Schüler aller Schularten in den richtigen Bearbeitungen der Aufgabe „Wandfläche“ .....	177
Abbildung 68: Ausführliche Rechnung zur Aufgabe „Wandfläche“ .....	178
Abbildung 69: Untersuchungsaufgabe „Zimmermann“ aus dem internationalen Test der PISA-Studie 2003 (OECD 2004, 52) .....	181
Abbildung 70: Häufigkeiten richtiger Antworten für die vier Entwürfe zur Aufgabe „Zimmermann“ für Schülerinnen und Schüler der Hauptschule und des Gymnasiums .....	188
Abbildung 71: Untersuchungsaufgabe „Rechteck“, ähnlich der Aufgabe „Rechteck“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2000 (vgl. Klieme u.a. 2001, 152) .....	192
Abbildung 72: Bearbeitungen zur Untersuchungsaufgabe „Rechteck“ .....	192
Abbildung 73: Beschreibungen der Schwierigkeit der Aufgabe „Rechteck“ im Interview .....	195
Abbildung 74: Untersuchungsaufgabe „L-Fläche“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2003 (vgl. Blum u.a. 2004, 47-92) .....	196

Abbildung 75: Scans der Bearbeitungen zur Untersuchungsaufgabe „L-Fläche“ ...	198
Abbildung 76: Beschreibungen zur Schwierigkeit der Aufgabe „L-Fläche“ im Interview .....	200
Abbildung 77: Untersuchungsaufgabe „Wandfläche“ aus dem nationalen Test der PISA-Studie 2003 (vgl. Blum u.a. 2004, 47-92).....	203
Abbildung 78: Bearbeitungen zur Untersuchungsaufgabe „Wandfläche“ .....	204
Abbildung 79: Beschreibungen zur Schwierigkeit der Aufgabe „Wandfläche“ im Interview .....	210
Abbildung 80: Untersuchungsaufgabe „Zimmermann“ aus dem internationalen Test der PISA-Studie 2003 (OECD 2004, 52) .....	213
Abbildung 81: Scans der Bearbeitungen zur Untersuchungsaufgabe „Zimmermann“ .....	214
Abbildung 82: Beschreibungen zur Schwierigkeit der Aufgabe „Zimmermann“ im Interview .....	221
Abbildung 83: Definitionen zum Begriff „Umfang“ im Interview.....	223
Abbildung 84: Definitionen zum Begriff „Flächeninhalt“ im Interview .....	224
Abbildung 85: Vergleich einer Skizze unter den Bearbeitungen der PISA-Hauptschülerinnen und –Hauptschüler mit der Skizze eines Untersuchungspaares .....	235
Abbildung 86: Anwendung der vereinfachten Variante des „paradigmatischen Modells“ nach Strauss und Corbin zur Theoriekonstruktion (Mey, Mruck 2009, 129) auf das Phänomen der Begrenztheit geometrischen Denkens und geometrischer Begriffe.....	246
Abbildung 87: Beschriftung und Rechnung bei der Aufgabe „Rechteck“ (FaraAnne).....	249
Abbildung 88: Beschriftung und Rechnung bei der Aufgabe „Rechteck“ (SinaVera) .....	249
Abbildung 89: Mögliche Verbindungen und Beispiele für Konsequenzen zur vorläufigen Kategorie „schematische und formelorientierte Vorstellungen und Vorgehensweisen“ .....	251
Abbildung 90: Mögliche Verbindungen und Beispiele für Konsequenzen zur vorläufigen Kategorie „Betonung des Rechnens“ .....	255
Abbildung 91: Mögliche Verbindungen und Beispiele für Konsequenzen zur vorläufigen Kategorie „an bekannte Figuren gebundene Vorstellungen und Vorgehensweisen“ .....	259
Abbildung 92: Mögliche Verbindungen und Beispiele für Konsequenzen zur vorläufigen Kategorie „Betonung des Messens“ .....	261

# 1 Einleitung

Geometrische Denkweisen durchdringen die gesamte Mathematik, denn mathematisches Denken bedient sich oft geometrischer Stützen. Immer, wenn es darum geht, visuell dargebotene Informationen aufzunehmen, zu analysieren, zu speichern und mit ihnen in der Vorstellung zu operieren, sind dabei geometrische Denkweisen von grundlegender Bedeutung.

Vor diesem Hintergrund prägte Artmann (1979) in seiner Vorlesung über Elementargeometrie den programmatischen Titel „Geometrie als Vorbild für Mathematik“. Er verdeutlicht, dass alle typischen mathematischen Arbeitsweisen in der Elementargeometrie einigermaßen unverfälscht und mit substantiellem Inhalt vorkommen und betont damit den eigentlichen Wert der Elementargeometrie als Schulfach. Freudenthal betont in diesem Zusammenhang den Nutzen der Geometrie für Entdeckungen zur Erschließung der Umwelt:

*„Geometrie ist eine der großen Gelegenheiten, die Wirklichkeit mathematisieren zu lernen. Es ist eine Gelegenheit, Entdeckungen zu machen ... Gewiss, man kann auch das Zahlenreich erforschen, man kann rechnend denken lernen, aber Entdeckungen, die man mit den Augen und Händen macht, sind überzeugender und überraschender. Die Figuren im Raum sind, bis man sie entbehren kann, ein unersetzliches Hilfsmittel, die Forschung und die Erfindung zu leiten.“ (Freudenthal 1973, Bd. 2, 380)*

Interessante Erkenntnisse hinsichtlich der Bedeutung geometrischer Denkweisen für die Mathematikleistungen zeigen sich in den Ergebnissen von PISA, dem „Programme for International Student Assessment“. Nach Expertenmeinung sind die PISA-Aufgaben zum Inhaltsbereich „Raum und Form“, der dem Bereich Geometrie nahe steht, als besonders bedeutsam für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht anzusehen (Blum u.a. 2005). Tatsächlich zeigen die insgesamt kompetenzstärksten Länder Bayern, Sachsen, Baden-Württemberg und Thüringen bei der Einordnung in das internationale Spektrum im Inhaltsbereich „Raum und Form“ überdurchschnittliche Kompetenzwerte. Gute Geometrieleistungen gehen demnach mit einer insgesamt hohen mathematischen Kompetenz einher: „Es handelt sich tatsächlich um die Länder mit einer insgesamt hohen mathematischen Kompetenz, wenn dieser Schwerpunkt in der Geometrie eingelöst wird“ (Blum u.a. 2005, 81). Diese Schlussfolgerung aus den PISA-Daten deutet darauf hin, dass im Bereich der Geometrie ein wichtiger Ansatz zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts liegt und ein Schlüssel zur Verbesserung der Mathematikleistungen insgesamt.

Doch nicht erst die Ergebnisse von Vergleichsuntersuchungen wie TIMSS und PISA trugen zum Erkennen der Bedeutung der Geometrie bei, sondern bereits die seit den 70er Jahren vorgetragenen kontinuierlichen Argumentationslinien (Bauersfeld 1967 und Winter 1976) für eine Förderung geometrischen Denkens im Mathematikunterricht, die sich durch ihre Allgemeinheit und Grundsätzlichkeit auszeichnen. So gibt es heute eine Vielzahl neuer Forschungsthemen, -ansätze und -methoden und die Komplexität didaktischer Problemstellungen im Geometrieunterricht ist bewusst geworden (Graumann u.a. 1996, 177).

Ohne die im nächsten Kapitel beschriebenen Sichtweisen aus Kognitionspsychologie und Mathematikdidaktik zum geometrischen Denken und zur geometrischen Begriffsbildung vorweg nehmen zu wollen, seien an dieser Stelle einige der wichtigsten Leitgedanken aufgeführt, die das Fördern geometrischen Denkens im Mathematikunterricht begründen (vgl. Radatz und Rickmeyer 1991 sowie Bauersfeld 1993):

- „Geometrische Inhalte fördern grundlegende kognitive Kompetenzen,
- Geometrische Inhalte erlauben das Entwickeln spezifischer mathematischer Denkweisen,
- Geometrie trägt Unverzichtbares zur Umwelterschließung bei,
- Arithmetische Begriffe werden in engem Zusammenhang mit geometrischen Begriffen ausgebildet.“ (zitiert nach Neubrand 1994, 37)

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen der Mitarbeit an der Konzeption und Auswertung der PISA-Studie 2003. Eine viel beachtete und diskutierte Konsequenz aus PISA ist der besondere Förderbedarf von Schülerinnen und Schülern im unteren Leistungsbereich. Der Anteil der Schülerinnen und Schüler in der Risikogruppe ist mit über 22 Prozent in Deutschland nach wie vor höher als in den meisten anderen Ländern. Die Reduzierung des hohen Anteils von Risikoschülerinnen und -Schülern ist ein dringendes Anliegen. Obwohl dies bereits eine zentrale Schlussfolgerung aus PISA 2000 war, sind gerade in diesem Bereich bis jetzt kaum Veränderungen zu erkennen (Blum u.a. 2004, 90).

Unbestritten scheint es hinsichtlich einer Weiterentwicklung des Geometrieunterrichts äußerst wichtig zu sein, mehr über die Vorgehensweisen dieser Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten von Geometrieaufgaben der PISA-Studie zu erfahren. Die Fragen nach gewählten Lösungswegen, Schwierigkeiten und Fehlern und den dahinter stehenden geometrischen Denkweisen ein-

zelter Schülerinnen und Schüler lassen sich jedoch allein anhand der vorliegenden PISA-Ergebnisse nicht ausreichend beantworten. PISA liefert globale Daten über Bildungssysteme und diese Ergebnisse darf man nicht ohne Weiteres auf einzelne Schülerinnen und Schüler beziehen. An dieser Stelle setzt die von mir durchgeführte, ergänzende qualitative Studie an. Als Probanden wurden Schülerinnen und Schüler ausgewählt, die eine Hauptschule besuchen, da die Hauptschülerinnen und Hauptschüler bei PISA den überwiegenden Teil von Risikoschülerinnen und –Schülern bilden.

Während bei PISA nur die Ergebnisse der Aufgaben betrachtet werden können, stehen in meiner qualitativen Erhebung die Lösungsprozesse und in diesem Zusammenhang die individuellen Vorstellungen und Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund. Dabei werden quantitative und qualitative Analysen in wechselseitigem Nutzen miteinander verbunden. Einen Orientierungsrahmen liefert das Modell der Didaktischen Rekonstruktion als gemeinsames Forschungsparadigma des Promotionsprogramms ProDid der Universität Oldenburg. In diesem Modell geht es darum, theoretische Sichtweisen mit Lernerperspektiven so in Beziehung zu setzen, dass daraus ein Lerngegenstand entwickelt werden kann (Kattmann u.a. 1997, 3).

Für die vorliegende Arbeit wurden folgende Forschungsfragen formuliert:

- Welche geometrischen Denkweisen von Hauptschülerinnen und Hauptschülern führen zu Schwierigkeiten beim Bearbeiten der PISA-Aufgaben?
- Wie lassen sich diese geometrischen Denkweisen vor dem Hintergrund mathematikdidaktischer und kognitionspsychologischer Sichtweisen und des Grundbildungskonzepts von PISA beschreiben und strukturieren?

In der durchgeführten qualitativen Studie bearbeiteten Hauptschülerinnen und Hauptschüler vier ausgewählte Geometrieaufgaben der PISA-Studie, die auf die Begriffe Flächeninhalt und Umfang zielen. Um eine möglichst hohe Datendichte mit unterschiedlichen Reflexionsebenen zu erreichen, wählte ich hierzu ein mehrphasiges Design, das unterschiedliche Erhebungsphasen verbindet.

Für die ergänzende qualitative Erhebung wurden vor diesem Hintergrund Untersuchungsfragen formuliert, die zur Beantwortung der Forschungsfragen führen sollen:

- Wie gehen die untersuchten Hauptschülerinnen und Hauptschüler beim Lösen der Aufgaben vor?

- Welche besonderen Schwierigkeiten zeigen sich beim Lösen der Untersuchungsaufgaben?
- Welche Fehler machen die untersuchten Hauptschülerinnen und Hauptschüler?
- Welche Vorstellungen haben die untersuchten Hauptschülerinnen und Hauptschüler von den Begriffen „Umfang“ und „Flächeninhalt“?

Ziel der Arbeit ist die Beschreibung und Strukturierung geometrischer Denkweisen von Hauptschülerinnen und Hauptschülern, die zu Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von PISA-Aufgaben führen. Aus den Ergebnissen werden Konsequenzen für den Geometrieunterricht abgeleitet. Im Folgenden wird zusammenfassend ein inhaltlicher Überblick über die einzelnen Kapitel und den Aufbau der vorliegenden Arbeit gegeben.

Die anschließenden Kapitel 2 und 3 bilden den theoretischen Teil der Arbeit. In Kapitel 2 werden das Grundbildungskonzept von PISA und seine Umsetzung in den Geometrieaufgaben beschrieben. Grundlegende Aspekte geometrischen Denkens und geometrischer Begriffsbildung sowie ausgewählte Sichtweisen aus Kognitionspsychologie und Mathematikdidaktik werden in Kapitel 3 dargestellt.

In Kapitel 4 wird auf das Modell der Didaktischen Rekonstruktion eingegangen, welches einen Orientierungsrahmen für diese Arbeit liefert. Die Methodologie und das methodische Vorgehen werden in Kapitel 5 dargestellt. In Kapitel 6 folgen die Analysen der Untersuchungsaufgaben, die neben dem Grundbildungskonzept von PISA und den beschriebenen theoretischen Aspekten die Grundlage für die Auswertung bilden. Insbesondere werden in diesem Kapitel die PISA-Ergebnisse und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die ergänzende, qualitative Erhebung berücksichtigt.

Die Dokumentation und die Analysen der Ergebnisse erfolgen in Kapitel 7 und 8. Während in Kapitel 7 die Ergebnisse der vier Untersuchungsaufgaben auf einer beschreibenden und zusammenfassenden Ebene dargestellt werden, erfolgt in Kapitel 8 die Verbindung quantitativer und qualitativer Ergebnisse und die Beschreibung und Strukturierung geometrischer Denkweisen, so wie es Ziel der Arbeit ist. Abschließend werden in Kapitel 9 Konsequenzen der Ergebnisse für den Geometrieunterricht in der Hauptschule aufgezeigt. Eine Zusammenfassung der Arbeit erfolgt in Kapitel 10.

## 2 Das Grundbildungskonzept von PISA

*„Our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organize the phenomena of the physical, social and mental world.“ (Freudenthal 1983, IX)*

Im ersten Teil dieses Kapitels wird auf das Grundbildungskonzept als Orientierungsrahmen der PISA-Studie eingegangen (Abschnitt 2.1). Die Operationalisierung des Grundbildungskonzepts in den Geometrieaufgaben der PISA-Studie wird im zweiten Teil dargestellt (Abschnitt 2.2).

### 2.1 Das Grundbildungskonzept als Orientierungsrahmen der PISA-Studie

Im folgenden Abschnitt werden zunächst die Begriffe „Mathematical Literacy“ und „Mathematische Grundbildung“ vor ihrem mathematikdidaktischen Hintergrund erörtert. Daran schließt sich eine Darstellung der übergreifenden Ideen und Kompetenzklassen als wesentliche Merkmale zur Einordnung der Aufgaben des internationalen PISA-Tests an. Für den nationalen Ergänzungstest zu PISA, der zusätzliche Untersuchungen beinhaltet, wurde der Begriff der mathematischen Grundbildung unter Berücksichtigung der vorherrschenden unterrichtlichen Schwerpunkte in Deutschland ausdifferenziert und erweitert. Deshalb wird in einem nächsten Abschnitt auf die aus der Differenzierung in der deutschen Rahmenkonzeption resultierenden „Typen mathematischen Arbeitens“ und auf die Struktur des Aufgabenmodells beim nationalen Test eingegangen. Abschließend werden einige relevante Informationen zur Anlage und Umsetzung der PISA-Studie 2003 gegeben.

#### 2.1.1 Mathematical Literacy“ und „Mathematische Grundbildung“ – mathematikdidaktische Hintergründe

Intention von PISA ist es, Indikatoren zu gewinnen, die konstruktiv nutzbare Hinweise auf den Stand der Bildung in den teilnehmenden Ländern ermöglichen. Auf diese Weise will PISA die Leistungsfähigkeit der Bildungssysteme messen. Die Studie ist so angelegt, dass grundlegende Stärken und Probleme identifiziert und empirisch belegt werden können (Neubrand 2004, 15).

Die Leistungstests in PISA orientieren sich dabei nicht nur an den curricularen Vorgaben in den einzelnen Ländern, sondern an einem Anspruch grundlegender Bildung für eine moderne, entwickelte Gesellschaft. Der Schlüsselbegriff hierfür ist „Mathematical Literacy“. In der internationalen Rahmenkonzeption

von PISA heißt es dazu: "Der Begriff Grundbildung (literacy) wurde gewählt, um zu betonen, dass mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten, wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden, im Rahmen von OECD/PISA nicht im Vordergrund stehen. Stattdessen liegt der Schwerpunkt auf der funktionalen Anwendung mathematischer Kenntnisse in ganz unterschiedlichen Kontexten und auf ganz unterschiedliche, Reflexion und Einsicht erfordernde Weise" (OECD 1999, 47). „Mathematical Literacy“ wird so definiert: „Mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded mathematical judgement and to engage in mathematics, in ways that meet the needs of that individual's current and future life as a constructive, concerned and reflective citizen.“ (OECD 1999, 41). Diese Formulierung geht zurück auf internationale und nationale mathematikdidaktische Diskussionen, über die an dieser Stelle ein Überblick gegeben werden soll, mit dem Ziel, die inhaltliche Bedeutung von „Mathematical Literacy“ und „Mathematischer Grundbildung“ im mathematikdidaktischen und pädagogischen Feld zu verorten.

Bereits der im Jahr 1994 durchgeführte TIMSS-Leistungstest orientierte sich an einem Bild der Bedeutung von „Mathematik als Werkzeug“, welches sich im Literacy-Gedanken von PISA fortsetzt (Baumert u.a. 1997, 58). Dennoch richtete man sich in erster Linie nach curricularen Vorgaben: „Bei aller Variabilität innerhalb und zwischen den Ländern gibt es so etwas wie ein internationales Kerncurriculum des Mathematikunterrichts in der Mittelstufe, das in sehr unterschiedlicher Form im Lehrplan, im Lehrbuch oder im professionellen Selbstverständnis von Mathematiklehrern verankert sein kann.“ (Baumert u.a. 1997, 58). Bei TIMSS/III wurde schließlich zum ersten Mal das Konstrukt „Mathematical Literacy“ verwendet. In dieser Untersuchung am Ende der Sekundarstufe II wurde neben einem Test mit curricularen Elementen auch ein Literacy-Test durchgeführt. In der entsprechenden Rahmenkonzeption heißt es: "Unlike both other components of TIMSS and other IEA-Studies, the mathematics and science literacy study is not curriculum based (...) Instead, it is a study of the mathematics and science learning that final year students have retained regardless of their current areas of study" (Orpwood und Garden 1998, 10-11). Ein Literacy-Test greift also nicht auf einzelne stoffliche Elemente zurück, sondern auf das jeweilige Umfeld, in das diese Elemente eingebettet sind. Dabei stehen allgemeine mathematische Fähigkeiten im Vordergrund, wie zum Beispiel Mathematisieren, Vernetzen und Reflektieren. Diese findet man in den Lehrplänen oft am Anfang bei den allgemeinen Zielen, Schlüsselqualifikationen oder fachspezifischen beziehungsweise fachübergreifenden Kompetenzen. Vor allem, wenn man, wie in PISA, die Qualität mathematischer Fähigkeiten

ten beschreiben will, um daraus letztendlich Hinweise zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts abzuleiten, ist dieser Literacy-Ansatz angemessen.

Die mathematikdidaktische Diskussion um allgemeine Ziele des Faches Mathematik ist breit gefächert, da die Aspekte, auf die sich mathematische Bildung bezieht, sehr vielfältig sind. Im folgenden Abschnitt werden einige Positionen dargestellt, die in engem Zusammenhang mit dem Literacy-Ansatz stehen.

Die internationale Rahmenkonzeption von PISA folgt im Wesentlichen den Vorstellungen des niederländisch-deutschen Mathematikers Hans Freudenthal (1973, 1983). Seine Ideen über Lehren und Lernen von Mathematik zielen vor allem auf Beziehungen zwischen Erfahrungen und Mathematik, einem zentralen Bestandteil von Literacy. Freudenthal argumentiert, dass alles Lernen und Lehren von Mathematik von der „Phänomenologie mathematischer Begriffe“ ausgehen müsse. Seine Sichtweise zielt darauf ab, dass nicht eine vorweggenommene Abstraktion und die anschließende Anwendung fertiger Konzepte, sondern der verständige, reflektierte Gebrauch in geeigneten Situationen das Lernen mathematischer Begriffe bestimme. Mathematische Begriffe werden demnach aus vielfältigen außer- und innermathematischen Situationen heraus gebildet und tragen umgekehrt „als Werkzeuge“ zur Erschließung „der Welt“ bei. Der Grundgedanke dahinter wird in der internationalen Rahmenkonzeption von PISA (OECD 1999, 41) wie folgt zitiert: „Our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world.“ (Freudenthal 1983, IX). Freudenthals Sichtweise beinhaltet eine „Orientierung an der Welt“, erschöpft sich aber nicht darin, sondern sieht dies als Bedingung, mathematische Begriffe als „mental objects“ auszubilden. Die Umsetzung dieser Ideen wurde im niederländischen Konzept der „Realistic Mathematics Education“ realisiert. Hierfür wurden Aufgaben entwickelt, in denen es nicht allein um den Einbezug von Anwendungen ging, sondern die von einer „realistischen“ Problemstellung ausgehen, an der mathematische Begriffe entwickelt werden. Die Aneignung der Begriffe steht hierbei im Vordergrund: „The real world problem will be used to develop mathematical concepts. (...) The problem is not in the first meant to be solved for problem solving purposes, but the real meaning lies in the underlying exploration of new mathematical concepts.“ (de Lange 1996, 90)

Diese begriffsbildende Seite der Mathematik kommt auch in den PISA-Aufgaben zum Ausdruck. Der überwiegende Teil der Aufgaben wurde so konzipiert, dass der Übergang von den Phänomenen zum mathematischen Begriff deutlich wird. Faktenwissen und prozedurale Fertigkeiten und Fähigkeiten

werden nicht isoliert erfasst, sondern stets eingebunden in kontextbezogene, problemorientierte Aufgaben. Diese Art von Aufgaben wird dem Literacy-Ansatz der internationalen Rahmenkonzeption gerecht.

Neubrand (2004) geht in seinen vertiefenden Analysen im Rahmen von PISA 2000 ausführlich auf die mathematikdidaktischen Hintergründe von „Mathematical Literacy“ und „Mathematischer Grundbildung“ ein. Neben Freudenthals Modell des Lehrens und Lernens von Mathematik, das Realitätsbezüge als Bedingung für die Ausbildung mathematischer Begriffe betont, nennt Neubrand zwei Sichtweisen aus der amerikanischen Mathematikdidaktik. Diese befassen sich im Rahmen der „Principles and Standards for School Mathematics“ (NCTM, 2000) mit der Bestimmung dessen, was mit Mathematik in der Ausbildung erreicht werden soll. Schlüsselbegriffe hierfür sind „literate citizenship“ und „mathematical proficiency“. Diese beiden Sichtweisen, die umfassende Ansprüche an „mathematische Fähigkeiten für alle“ darstellen, sollen hier aufgegriffen werden.

Schoenfeld (2001) geht davon aus, dass man als „literate citizen“ vor Problemen steht, die sich nicht mithilfe vorgefertigter Lösungen und standardisierten Verfahren bearbeiten lassen. Für jeden Beruf sei es wichtig, Entscheidungen zu treffen und Daten zu analysieren vor allem aber Daten und Fakten überzeugend darzustellen: „In short, the mathematical skills that will enhance the preparation of those who aspire to careers mathematics are the very same skills that will help people become informed and flexible citizens, workers, and consumers.“ (Schoenfeld 2001, 53) Es sei vor allem die Fähigkeit, „to make use of various modes of mathematical thought and knowledge to make sense of situations we encounter as we make our way through world“, die man tatsächlich benötige, betont Schoenfeld. Er fordert, im Unterricht vor allem kontextbezogene, problemhaltige Aufgaben zu stellen, die diese Fähigkeit ansprechen und die wesentlich sind für „literate citizenship“.

Klipatrick (2002) verwendet den Begriff „mathematical proficiency“, um „mathematische Bildung für alle“ zu erfassen. Für einen Bericht, der so genannten Mathematics Learning Study (Klipatrick, Swafford, Findell, 2001) an den National Research Council, formuliert er „five stands of mathematical proficiency“: (a) conceptual understanding, which refers to the student's comprehension of mathematical concepts, operations and relations; (b) procedural fluency, or the student's skill in carrying out mathematical procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately; (c) strategic competence, the student's ability to formulate, represent, and solve mathematical problems; (d) adaptive reasoning, the capacity for logical thought and for reflection on, explanation of, and

justification of mathematical arguments; and (e) productive disposition, which includes the student's habitual inclination to see mathematics as a sensible, useful, and worthwhile subject to be learned, coupled with a belief in the value of diligent work and in one's own efficacy as a doer of mathematics." (Klippatrick 2002, 66)

Im Gegensatz zu Freudenthals und Schoenfelds Vorgehen, argumentiert Klippatrick sozusagen spiegelbildlich aus einer inneren Sicht der Mathematik heraus. Er geht aus von den Strukturen und dem Potenzial des Faches und kommt dennoch zu demselben Ergebnis, nämlich, dass der verständige Gebrauch mathematischer Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten in Problem- und Anwendungskontexten wesentlicher Teil mathematischer Grundbildung ist.

Klippatrick's breit gefächert angelegte Sichtweise prägte auch die in Deutschland geführten Diskussionen zur mathematischen Allgemeinbildung. Neubrand (2004, 15-23) schildert in diesem Zusammenhang unter anderem Positionen von Tenorth (Tenorth 1994) und Winter (1995) sowie Inhalte des Gutachtens zum BLK-Modellversuch „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (BLK 1997). Im Abschnitt „Mathematik im Rahmen einer modernen Allgemeinbildung“ dieses Gutachtens, wird beschrieben, dass sich die Mathematik im Spannungsfeld von „Abbildungsfunktion und systemischen Charakter“ bewegt. Einerseits orientiert sich die Mathematik an der Welt, andererseits hat die Mathematik einen abstrakten und formalen Charakter und eine gewisse innere „Ordnung“. Die Herausforderung an den Mathematikunterricht sei es, beide Aspekte miteinander zu verbinden.

Tenorth beschreibt die Spannung spezifisch-gegenstandsgebundener Kenntnisse und formaler Denkweisen aus einem anderen Theoriezusammenhang heraus, nämlich an den zwei Polen, „der Sicherung eines Minimalbestands an Kenntnissen“ auf der einen Seite und der „Kultivierung der Lernfähigkeit“ auf der anderen Seite (Tenorth 1994, 101). Mit der Kultivierung der Lernfähigkeit meint er, eine Sicherung von Lernfähigkeit, die über den kognitiv lernenden Umgang hinaus geht, indem der Lernprozess im Unterricht selbst zur Sprache gebracht wird. Im Bezug auf die Mathematik geht es vor allem um die begriffliche Vernetzung durch das Mathematisieren von Situationen. Notwendig dafür ist ein breites Bild von Mathematik, das Verfahren, mathematische Modelle und innermathematische Strukturen umfasst.

Winter bündelt in seinem Aufsatz „Mathematik und Allgemeinbildung“ (Winter 1995) die Breite des Anspruchs an mathematische Allgemeinbildung in drei Grunderfahrungen: „(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen

oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen; (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen; (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.“ (Winter 1995, 37).

In Aspekt (1) ist die Anwendbarkeit der Mathematik angesprochen. Dies bedeutet vor allem zu erfahren, wie mathematische Modellbildung funktioniert. Voraussetzung dafür ist das Verfügen über Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu den verschiedenen Inhaltsbereichen der Mathematik, beispielsweise über Geometrie. Mit Aspekt (2) meint Winter die innere Struktur der Mathematik. Hier geht es darum zu erfahren, dass Menschen Begriffe bilden und dass man mit Begriffen ein ganzes Netz aufbauen kann. Mit ihrem hohen Grad an Vernetzung stellt die Mathematik als „Schule des Denkens“ ein reichhaltiges Potenzial für das Reflektieren über Wege des Denkens bereit. Hierdurch werden, wie in Aspekt (3) angesprochen, heuristische Strategien entwickelt, die sich auf andere Fächer und darüber hinaus auf unterschiedliche Bereiche des täglichen Lebens übertragen lassen.

Die geschilderten Sichtweisen zu „Mathematical Literacy“ und „Mathematischer Grundbildung“ bilden mathematikdidaktische Hinergründe zur Strukturierung der PISA-Aufgaben. In der internationalen Konzeption von PISA werden zwei wesentliche Merkmale zur Einordnung der Aufgaben beschrieben: die verschiedenen mathematischen Inhaltsbereiche (übergreifende Ideen) und die internationalen Kompetenzklassen (Abschnitt 2.1.2). Hinsichtlich der nationalen Erweiterung ist dies die Differenzierung der Aufgaben in Stoffgebiete und Typen mathematischen Arbeitens (Abschnitt 2.1.3). Darstellungen hierzu erfolgen in den nächsten beiden Abschnitten.

### 2.1.2 Die übergreifenden Ideen und Kompetenzklassen als Konstruktionsmerkmale des internationalen PISA-Tests

Die Klassifikation in die mathematischen Inhaltsbereiche folgt dem internationalen „Literacy“-Ansatz. Mathematische Begriffe, Methoden und Ideen werden danach im Sinne von Freudenthal (Abschnitt 2.1.1) als Werkzeuge betrachtet, mit denen die Phänomene der natürlichen, sozialen, kulturellen und mentalen „Welt“ beschrieben und strukturiert werden können. Mit der PISA-Studie soll überprüft werden, inwiefern Schülerinnen und Schüler diese Werkzeuge vollständig anwenden können. Deshalb ist es naheliegend, die mathematischen